



DLR-IB-FA-BS-2016-224

**Ermittlung der auf ein Balken-
system wirkenden Kraft bzw.
Weganregung mit DMS**

Masterarbeit

Ozan Tamer
Björn Timo Kletz



DLR

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

DLR-IB-FA-BS-2016-224

**Ermittlung der auf ein Balkensystem wirkenden Kraft
bzw. Weganregung mit DMS**

Zugänglichkeit:

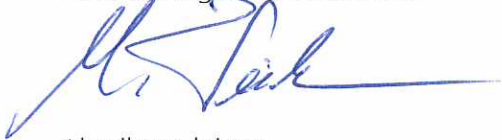
Stufe 1

Braunschweig, *Oktober, 2016*

Der Bericht umfasst: 77 Seiten

Institutsleiter:

Prof. Dr.-Ing. M. Wiedemann



Abteilungsleiter:

Prof. Dr.-Ing. H. P. Monner



Autoren:

O. Tamer



Betreuer:

B. T. Kletz



**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt**

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung	V
Danksagung	VI
Abbildungsverzeichnis	IX
Tabellenverzeichnis	XI
Abkürzungsverzeichnis	XII
Symbolverzeichnis	XIII
Kurzfassung	XV
1 Einleitung	1
1.1 Problembeschreibung und Anwendungsbereiche	1
1.2 Vorgehensweise der Lösung der Aufgabe	2
2 Grundlagen	3
2.1 Piezokeramische Flächenwandler auf metallischen Strukturen	3
2.2 Dehnungsmessstreifen (Funktionsprinzip)	5
3 Statischer Fall	7
3.1 Analytisches Modell	7
3.2 Ergebnisse des Modells	10
3.3 Bestimmung der DMS-Position	13
3.4 Kraftberechnung durch DMS für den statischen Fall	14
4 Dynamischer Fall	16
4.1 Grundlage für dynamische Lösung (Übertragungsmatrizenverfahren)	16
4.1.1 Kragbalken unter Kraftanregung	21
4.1.2 Kragbalken unter Fußpunktanregung	23
4.2 Analytisches Modell	25
4.3 Ergebnisse des Modells	34
5 Mehrdimensionales Problem	37
5.1 Definition des Problems	37
5.2 Vorgehensweise zur Lösung	38

6 Experimente	42
6.1 Aufbau und Funktion des Versuchsstands	42
6.1.1 Eindimensionaler Bewegungsfall	44
6.1.1.1 Statischer Fall	44
6.1.1.2 Dynamischer Fall	44
6.1.2 Dreidimensionaler Bewegungsfall	45
6.2 Durchführung der Experimente	45
6.2.1 Experimente des eindimensionalen Falls	46
6.2.1.1 Die statischen Experimente	46
6.2.1.2 Die dynamischen Experimente	47
6.2.2 Experimente des dreidimensionalen Falls	47
6.3 Auswertung der Messergebnisse	49
6.3.1 Lösungsprinzip der Auswertung	49
6.3.2 Eindimensionaler Fall	52
6.3.3 Dreidimensionaler Fall	55
7 Fazit	63
Literaturverzeichnis	66

Abbildungsverzeichnis

1.1	Anregung des äußeren Rückspiegels wegen des Winds [Kletz et al. 2012] .	2
2.1	Definition der Achsenrichtungen und Polarisierung P [PI-Ceramics 2011] . .	3
2.2	Viertelbrückevariation der Wheatstonesche-Brücke [Hoffmann]	5
2.3	Active Messgitterlänge [Gommola 2014]	6
3.1	Darstellung des statischen Falls	7
3.2	Querschnitt des Piezoaktuators geklebten Balkens	8
3.3	Biegelinie des Balkens unter nur Kraft für den Fall mit/ohne Piezoaktor .	11
3.4	Biegelinie des Balkens unter nur Kraft (links) und unter nur Piezoaktor (rechts)	11
3.5	Biegelinie des Balkens unter Anregung von Piezo- und Kraftanregung . . .	12
3.6	Moment-, Dehnungs- und Krümmungsverlauf nach Balkenlänge unter An- regung	13
3.7	Momentverlauf für Piezoaktor	14
3.8	Darstellung des Kragbalkens mit DMS	14
4.1	Darstellung des dynamischen Falls	16
4.2	Übertragungsmatrizen	17
4.3	Kragbalken unter Kraftanregung	21
4.4	Kragbalken unter Fußpunktanregung	23
4.5	Kragbalken mit Piezoaktor	25
4.6	Determinantenverlauf und Eigenfrequenzen	26
4.7	Kragbalken mit Piezoaktor unter Kraftanregung	27
4.8	Kragbalken mit Piezoaktor unter Kraftanregung	28
4.9	Kragbalken mit Piezoaktor unter Fußpunktanregung	29
4.10	Kragbalken mit Piezoaktor unter Fusspunktanregung	30
4.11	Kragbalken mit Piezoaktor unter Piezoanregung	31
4.12	Kragbalken mit Piezoaktor unter Piezoanregung	33
4.13	Auslenkung des Endpunktes abhängig von der Dämpfung	35
4.14	Dehnungsergebnisse des Balkens unter Anregung	35
4.15	Logarithmische Dehnungsergebnisse des Balkens unter Anregung	36
5.1	Dreidimensionaler Fall	37
5.2	Zweidimensionale Bewegung	38
5.3	Balkensystem unter Piezoanregung	39
5.4	Balkensystem unter Kraftanregung	40
5.5	Balkensystem unter Fußpunktanregung	41

6.1	Der Versuchsstand für eindimensionalen Fall (1. Fußpunktanregung (Grundplatte), 2. Piezoanregung, 3. Lasersensor, 4. Kraftanreger, 5. Kraftsensor) .	42
6.2	Darstellung der Teilen des Versuchsstandes (1.Kraftsensor, 2.Kraftanregung, 3.Triangulationssensor, 4.Flächenaktuator (orange), 5.DMS (rot), 6.Fußpunktanregung)	43
6.3	Die eindimensionale Balkenbewegung	44
6.4	Die eindimensionale dynamische Balkenbewegung	44
6.5	Der dreidimensionale Fall	45
6.6	Die Nummer der DMS (Flächenaktoren in orange, DMS in rot dargestellt). .	48
6.7	Versuchsstand für dreidimensionale Bewegung (1. Grundplatte, 2. Piezoaktuator, 3. Kraftanreger, 4. Platte, 5. Gegengewicht)	48
6.8	Modell für den eindimensionalen Fall (1. Piezoaktuator, 2. DMS)	52
6.9	Position des DMS im eindimensionalen Fall (Flächenaktor in orange, DMS in rot dargestellt).	52
6.10	Dehnungsergebnisse des eindimensionalen Falls	53
6.11	Vergleich der Dehnungsergebnisse des eindimensionalen Falls	53
6.12	Vergleich der Dehnungsergebnisse des eindimensionalen Falls unter Kombinationen von Kraftanregung	54
6.13	Position des DMS im dreidimensionalen Fall	55
6.14	Viertelmodell des dreidimensionalen Balkensystems	55
6.15	DMS-Ergebnisse für die erste Bewegungsrichtung	56
6.16	Vergleich der DMS-Ergebnisse für die erste Bewegungsrichtung für Teil 1 .	57
6.17	Vergleich der Kraft aus der DMS-Ergebnisse unter Kombination von Kraftanregung in der erste Bewegungsrichtung für Teil 1	57
6.18	DMS-Ergebnisse für die zweite Bewegungsrichtung	58
6.19	Vergleich der DMS-Ergebnisse für die zweite Bewegungsrichtung für Teil 1	59
6.20	Vergleich der Kraft aus der DMS-Ergebnisse unter Kombination von Kraftanregung in der zweite Bewegungsrichtung für Teil 1	59
6.21	DMS-Ergebnisse für die dritte Bewegungsrichtung	60
6.22	Vergleich der DMS-Ergebnisse in der dritte Bewegungsrichtung für Teil 2 .	61
6.23	Vergleich der Kraft aus der DMS-Ergebnisse unter Kombination von Kraftanregung in der dritte Bewegungsrichtung für Teil 2	61

Tabellenverzeichnis

6.1	Verstärkung der Anregung	46
6.2	Daten der statischen Messungen	47
6.3	Daten der statischen Messungen (180°)	47

Abkürzungsverzeichnis

bzw. : beziehungsweise

DMS : Dehnungsmessstreifen

et al. : und andere

vgl : vergleiche

z.B : zum Beispiel

Symbolverzeichnis

A	: Querschnittsfläche
A_i, a_i	: Konstante für Rayleigh-Funktion
b_b	: Breite des Balkens
b_p	: Breite des Piezoaktuators
C	: Integralkonstante
c_k	: steifigkeitsproportionales Dämpfungskonstant
c_m	: massenproportionales Daämpfungskonstant
$d_{i\lambda}$: piezoelektrisches Ladungskonstant
ε	: Dehnung
E_b	: E-Modul des Balkens
E_i	: elektrische Feldstärke
EI_{ges}	: Gesamte Biegesteifigkeit von Balken und Piezoaktuator
E_p	: E-Modul des Piezoaktuators
h_b	: Dicke des Balkens
h_p	: Dicke des Piezoaktuators
k	: DMS-Proportionalitätsfaktor
L	: Länge des Balkens
M	: Biegemoment (im Zustandsvektor)
M_i	: Modale Masse
M_p	: Moment durch Piezoaktuator
ω	: Eigenfrequenz
Ω	: Erregerfrequenz
φ	: Neigung im Zustandsvektor
Q	: Querkraft im Zustandsvektor
ρ	: Dichte
R	: Widerstand
R_i	: Rayleigh-Funktion

RK : laterale Kontraktion

$R_i(x)$: Rayleigh-Funktion

$s_{\lambda\mu}^E$: Nachgiebigkeitskonstant

σ : Spannung

t_{ii} : Elemente der Übertragungsmatrizen

T_i : Übertragungsmatrizen

T(t) : Zeitlicher Verlauf

u : Fußpunktanregung

U : elektrische Spannung

U_{Ref} : Referenzspannung

$V(\Omega)$: Frequenzabhängiger Vergrößerungsfaktor

$V_{Fu\beta}$: Vergrößerungsfaktor für Fußpunktanregung

V_{Kraft} : Vergrößerungsfaktor für Kraft

V_{Piezo} : Vergrößerungsfaktor für Piezoaktor

w : Auslenkung

w' : Neigung

W : Auslenkung im Zustandsvektor

W(x) : Eigenform

x : Abstand

ξ : Dämpfung

z_0 : Abstand der neutralen Faser

Kurzfassung

Mit Hilfe der Anregung von piezokeramischen Flächenwandler ist die Schwingungsberuhigung am Ende des Balkens möglich, während der Balken durch Kraft dynamisch angeregt wird. Die Piezoanregung zur Schwingungsunterdrückung ist abhängig von der anregender Kraft. Die Verwendung der Sensoren an den Angriffsstellen der Kraft ist eine klassische Methode, um Kraft zu bestimmen. In dieser Arbeit wird beabsichtigt, mit Hilfe von DMS diese anregende Kraft zu bestimmen. Dafür werden ein- und dreidimensionales Balkensystem verwendet. Durch analytische Methode werden die beiden Systeme untersucht. Danach werden Versuchsstände für die Balkensystem aufgebaut, damit man die entstehenden Dehnungen unter Anregung messen kann.

1 Einleitung

Bei einem Balkensystem kann die lokale Schwingungsberuhigung mit Hilfe von Piezoaktuatoren erreicht werden, während das System durch Kraft oder Weg (z.B. Fußpunktanregung) dynamisch angeregt wird. Um die Schwingungsberuhigung zu ermöglichen, ist es notwendig, die Eingangsgrößen zu bestimmen. Die Benutzung der Sensoren an den Anregungsstellen, die z.B. anregende Kraft oder anregenden Weg messen, ist eine klassische Methode.

In dieser Masterarbeit wird beabsichtigt, die Anregungsgrößen (Kraft) mit DMS zu bestimmen, die auf ein Balkensystem geklebt sind. Der Hintergrund dieser Idee ist, dass man durch Verwendung von DMS möglicherweise auf Kraftsensoren verzichten kann.

1.1 Problembeschreibung und Anwendungsbereiche

Die Schwingungen können sich überall z.B. bei Fahrzeugen, Gebäudes oder Maschinen befinden. Die Schwingung ist meistens unerwünscht, weil sie unangenehme Geräusche, Spannungen in der Struktur oder Betriebsstörungen verursachen [Fei 2005].

In der Fahrzeugindustrie führt die Schwingung des äußeren Rückspiegels zur Reduzierung der Sicherheit. Diese Problem ist eine Beschwerde der Kunden. Besonders leiden die Spiegel der großen Fahrzeugs unter diesem Problem. Sogar relativ kleine Spiegel des Motorräder zeigen große Amplituden [Kletz et al. 2012]. Die Abbildung 1.1 zeigt eine Darstellung für die Einwirkung des Winds (als Störungsfaktor) auf äußeren Rückspiegel. Der Wind ist ein Grund, der unerwünschte Schwingungen verursacht.

Außer des Winds gibt es andere Störungen bei einem Fahrzeug während der Fahrt. Die Schwingungen, die durch Unebenheiten von Straßen und durch den Betrieb des Motors entstehen, sind die Beispiele dafür. Unter diese Anregungen kann der äußere

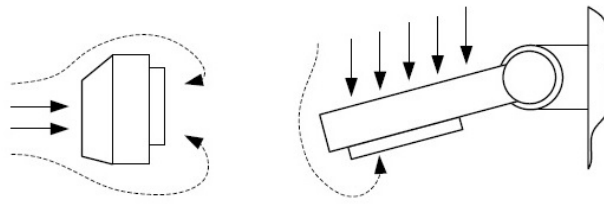


Abbildung 1.1: Anregung des äußeren Rückspiegels wegen des Winds [Kletz et al. 2012]

Spiegel nicht stabil bleiben. Es wird beabsichtigt, diese störende Bewegung am Spiegel zu verhindern. Eine klassische Methode für solches Problem, die Steifigkeit des Spiegels zu erhöhen, kann in diesem Fall nicht erfolgreich sein. Das Problem kann allerdings durch Einleiten von zusätzlichen Kräften durch einen Aktor gelöst werden [Kletz et al. 2012].

Zur Beseitigung des Schwingungsproblems müssen die Eingangsgrößen bestimmt werden. Die Anregungen können durch Sensoren bestimmt werden. In dieser Arbeit wird die Möglichkeit untersucht, die anregende Kraft durch DMS zu bestimmen.

1.2 Vorgehensweise der Lösung der Aufgabe

Für die Lösung des Problems ist eine analytische Lösung notwendig als erstes. Durch ein mathematisches Modell können die bestimmten Parameter und ihre Auswirkungen auf die Struktur besser verstanden werden. In diese Arbeit werden ein- und dreidimensionales Balkensystem behandelt. Es wird angenommen, dass das System unter Kraft-, Piezo- und Fußpunktanregung angesteuert wird. Obwohl das mathematische Modell nützlich für die Analyse des Systems ist, hat das Modell höheren Aufwand bei den komplizierten Systemen. Für den dreidimensionalen Balken ist die Lösung nur mit großem Aufwand möglich. Deswegen wird diese Struktur nur experimentell analysiert.

Für die Experimente muss ein Versuchsstand aufgebaut werden. Mit diesem Versuchsstand werden die erwarteten Störungsfaktoren simuliert werden. Dank dieses Versuchsstands wird das Balkensystem unter Anregungen untersucht. Durch die experimentellen Analysen können die Ergebnisse der mathematischen Lösungen verglichen werden.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die grundlegende Funktion von zwei wichtigen Elementen der Arbeit erklärt. Diese Elemente sind piezokeramische Flächenwandler und Dehnungsmessstreifen. Der Piezoaktuator wird zur Anregung des Balkensystems verwendet. Mit DMS wird die Bestimmung der anregenden Kraftgröße bezweckt.

2.1 Piezokeramische Flächenwandler auf metallischen Strukturen

Piezelektrisches Material wandelt mechanischen Druck zur elektrischen Spannung oder elektrische Spannung zum mechanischen Druck. Aus diesem Grund kann man das Piezoelement sowohl Sensor als auch Aktuator verwenden. In der Abbildung 2.1 wird die Achsenrichtungen und Polarisation P beim Piezoelement dargestellt. Das

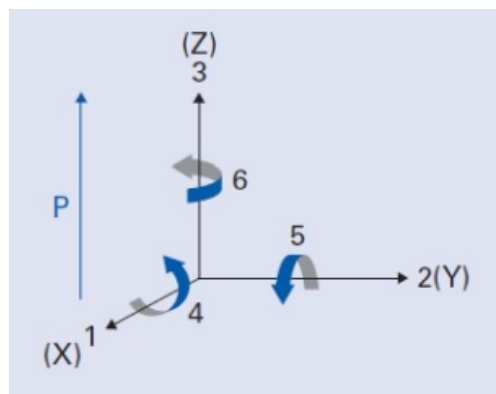


Abbildung 2.1: Definition der Achsenrichtungen und Polarisation P [PI-Ceramics 2011]

elektromechanische Verhalten des Piezoaktuators ist unten mathematisch gegeben.

$$\varepsilon_{\lambda} = s_{\lambda\mu}^E \sigma_{\mu} + d_{i\lambda} E_i \quad (2.1)$$

$$\lambda, \mu = 1 \dots 6; i, k = 1 \dots 3$$

In der Gleichung 2.1 ist die Formel der Aktuatoreffekt gezeigt. ε_λ ist für die Dehnung, $s_{\lambda\mu}^E$ ist für die Nachgiebigkeitskonstante [m^2/N], σ_μ ist für die mechanische Spannung [N/m^2], $d_{i\lambda}$ ist für die piezoelektrischen Ladungskonstante [m/V] und E_i ist für die elektrische Feldstärke [V/m]. Der erste Index von s bezeichnet die Dehnungsrichtung, der zweite die Spannungsrichtung. Der erste Index von d bezeichnet die Richtung des angelegten elektrischen Feldes, der zweite die Richtung der erzeugten Dehnung [Sinapius 2013].

Die Funktion des piezokeramischen Flächenwandler in der Arbeit ist, eine Anregung für den Balken herzustellen. Mit diesem Element ist es möglich eine Schwingung zu erschaffen. Diese Schwingung kann sowohl eine Störungsfaktor für die Struktur als auch zur Unterdrückung einer Schwingung bei der Struktur verwendet werden.

Smart Structures mit piezokeramischem Material haben auf sich in letzten Jahren in der Vibrationskontrolle der Strukturen gezogen. Das liegt daran, dass das Material einfach, klein und leicht für die Anwendung ist. Außerdem hat dieses Material großes Anwendungsbereich und einfache Integration zu den Metall- und Kompositteilen [Fei 2005].

Piezoaktoren werden in der aktiven Vibrationskontrolle verwendet. Dafür muss durch den Piezoaktuator eine Gegenkraft in gleichem Betrag mit einer Phase erstellt werden, die unterschiedlicher als die Phase des Störungsfaktors. Auf diese Weise hört die Struktur mit der Vibration auf [Kumar et al. 2014].

2.2 Dehnungsmessstreifen (Funktionsprinzip)

In dem experimentellen Teil Arbeit werden Dehnungsmessstreifen (DMS) benutzt, damit man die Ergebnisse des analytischen Modells und der Simulation vergleichen kann. Dehnungsmessstreifen werden zur Messung der Dehnung eines Objekts verwendet, das unter Belastung ist. Dank der DMS ist es möglich, die Werkstoffbeanspruchung des Prüfobjekts zu bestimmen. Außerdem können die Art und der Betrag der Krafteinwirkung definiert werden [Hoffmann 1984].

Die Prinzip von DMS basiert auf die Wheatstonesche Brücke. Diese Brücke ermöglicht die kleine Änderungen der Widerständen auf der Brücke zu messen. Die entstehende Dehnung ε ist abhängig von der relativen Widerstandsänderung wie in der Gleichung 2.2 [Hoffmann].

$$\frac{\Delta R}{R_1} = k \cdot \varepsilon \quad (2.2)$$

In der Gleichung 2.2 ist k-Wert der Faktor für Proportionalität. Diese Größe ist experimentell erhalten. Bei metallischen Dehnungsmessstreifen wird dieser Wert als ca. 2 verwendet [Hoffmann].

Es gibt unterschiedliche Brückenvariationen für DMS Anschluss. In dieser Arbeit wird die Viertelbrücke verwendet. Das Bild 2.2 zeigt die Darstellung der Viertelbrückenvariation. Beim Viertelbrückenanschluss ist der Zusammenhang zwischen

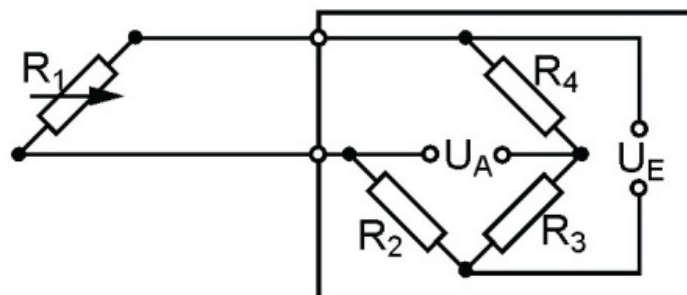


Abbildung 2.2: Viertelbrückevariation der Wheatstonesche-Brücke [Hoffmann]

Spannung und Dehnung beim Widerstand R_1 ist unten gegeben.

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{k}{4} \cdot \varepsilon_1$$

In der Abbildung 2.3 wird ein eingespanntes Bauteil dargestellt, der am freien Ende durch Kraft belastet ist. Die Abbildung 2.3 zeigt die gemessene Dehnungsänderung eines DMS nach seiner Länge. In der Abbildung 2.3 wird mit Nummer 1 die maximal

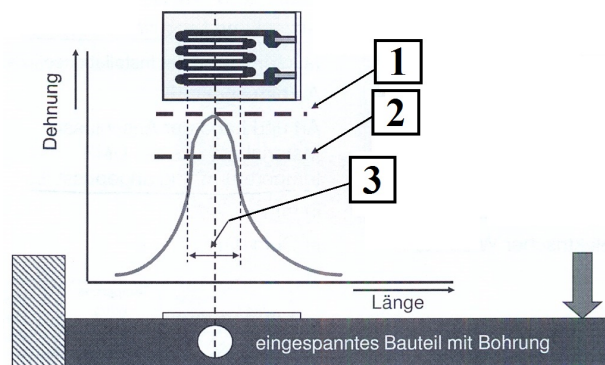


Abbildung 2.3: Active Messgitterlänge [Gommola 2014]

vorhandene Bauteildehnung dargestellt. Mit Nummer 2 gezeigtes Ergebnis ist das resultierende Dehnungssignal des DMS. Nummer 3 ist die aktive Länge des DMS. Bei der DMS-Messung wird der arithmetische Mittelwert unter die aktive Messgitterlänge gebildet [Gommola 2014].

3 Statischer Fall

Das Balkensystem wird zuerst für den statischen Fall untersucht. In diesem Fall ist der Balken unter Anregung von piezokeramischen Flächenwandler und der Kraft. Die Kraft wirkt auf das System am freien Ende des Balkens. Der Piezoaktuator ist auf der eingespannten Seite des Balkens geklebt.

3.1 Analytisches Modell

Ein schlanker Balken wird in der Arbeit verwendet. Nach Bernoullischen Annahmen wird angenommen, dass ein dünner Balken einen Querschnitt hat, der unter Last genügend eben bleibt [Gross et al. 2014]. Aus diesem Grund wird die analytische Modellierung des Balkensystems mit Euler-Bernoulli Balkentheorie durchgeführt. In der

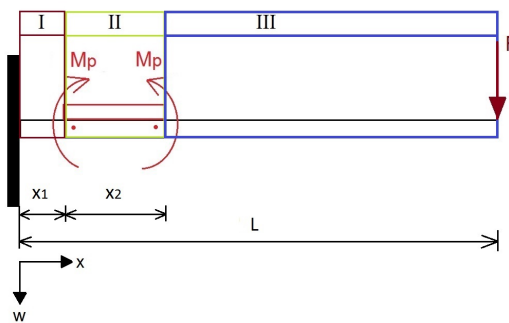


Abbildung 3.1: Darstellung des statischen Falls

Abbildung 3.1 ist es zu sehen, wie der Piezoaktuator und Kraft auf den Balken beeinflussen. Für die Lösung wird der Balken in drei Gebiete getrennt. Der Grund dafür ist, dass der Balken unterschiedliche Biegesteifigkeit hat, wo der Piezoaktuator geklebt ist.

Der Teil am Balken, wo der Piezoaktuator geklebt ist, hat eine Biegesteifigkeit, die abhängig von der Young Modul des Balkens und des Flächenaktuators. Die Darstellung des kompositen Teils ist in der Abbildung 3.2 dargestellt. Die gesamte Biegesteifigkeit

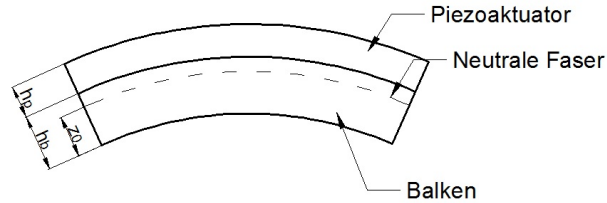


Abbildung 3.2: Querschnitt des Piezoaktuator geklebten Balkens

des Systems und die Lage der neutralen Faser wird unten berechnet [Wierach 2009].

Der Abstand der neutralen Faser ab unten des Balkens wird als z_0 geschrieben.

$$z_0 = \frac{E_b b_b h_b^2 + 2E_p b_p h_p h_b + E_p b_p h_p^2}{2(E_b b_b h_b + E_p b_p h_p)} \quad (3.1)$$

Die gesamte Biegesteifigkeit des Balkensystems wird als EI_{ges} geschrieben.

$$EI_{ges} = E_b b_b (z_0^2 h_b - z_0 h_b^2 + \frac{h_b^3}{3}) + E_p b_p (z_0^2 h_p - 2z_0 h_b h_p - z_0 h_p^2 + h_b^2 h_p + h_b h_p^2 + \frac{h_p^3}{3}) \quad (3.2)$$

Mit der Berechnung der gesamten Biegesteifigkeit des Piezoaktuators und des Balkens ist es möglich, den statischen Fall zu untersuchen.

Die Lösung der analytischen Methode fängt mit dem Gebiet I an. Dieses Gebiet liegt von der eingespannten Seite des Balkens bis zum Anfang des Piezoaktuators.

Gebiet I (rote Farbe) $\rightarrow 0 \leq x \leq x_1$

$$M_1 = F \cdot (L - x) \quad (3.3)$$

$$(EI)_b \cdot w_1''(x) = F \cdot (x - L) \quad (3.4)$$

w'' ist für die Krümmung bei diesem Gebiet.

$$(EI)_b \cdot w_1'(x) = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x^2 - F \cdot L \cdot x + C_1$$

w' ist für die Neigung des definierten Gebiets.

$$(EI)_b \cdot w_1(x) = \frac{1}{6} \cdot F \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot F \cdot L \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2$$

Durch das Integrieren von $EI \cdot w'$ nach x wird die Biegelinie für das Gebiet berechnet. Danach werden die Integral-Konstante (C) mit Hilfe der Randbedingung von fest-frei Balken bestimmt.

Die Randbedingungen : $w_1(x=0) \rightarrow C_2 = 0$; $w_1'(x=0) \rightarrow C_1 = 0$

$$(EI)_b \cdot w_1(x) = \frac{1}{6} F x^3 - \frac{1}{2} F L x^2 \quad (3.5)$$

Gebiet II (gelbe Farbe) $\rightarrow x_1 \leq x \leq x_2$

Dieses Gebiet zeigt auf, wo der Piezoaktuator auf dem Balken geklebt ist.

$$M_2 = F \cdot (L - x) + M_{pz} \quad (3.6)$$

$$(EI)_{ges} \cdot w_2''(x) = F \cdot (x - L) - M_{pz} \quad (3.7)$$

$$(EI)_{ges} \cdot w_2'(x) = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x^2 - F \cdot L \cdot x - M_{pz}x + C_3$$

$$(EI)_{ges} \cdot w_2(x) = \frac{1}{6} \cdot F \cdot x^3 - \frac{1}{2} F \cdot L \cdot x^2 - \frac{1}{2} M_{pz} x^2 + C_3 x + C_4$$

Die Randbedingungen : $w_1'(x=x_1) = w_2'(x=x_1)$; $w_1(x=x_1) = w_2(x=x_1)$. Die Integralkonstante werden mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt.

$$C_3 = \frac{1}{(EI)_b} \left(\frac{1}{2} F x_1^2 - F L x_1 \right) - \frac{1}{(EI)_{ges}} \left(\frac{1}{2} F x_1^2 - F L x_1 - M_{pz} x_1 \right)$$

$$C_4 = \frac{1}{(EI)_b} \left(\frac{1}{6} F x_1^3 - \frac{1}{2} F L x_1^2 \right) - \frac{1}{(EI)_{ges}} \left(\frac{1}{6} F x_1^3 - \frac{1}{2} F L x_1^2 - \frac{1}{2} M_{pz} x_1^2 + C_3 x_1 \right)$$

Gebiet III (blaue Farbe) $\rightarrow x_2 \leq x \leq L$ Dieses Gebiet beginnt ab dem Ende des Piezoaktuators bis zum freien Ende des Balkens.

$$M_3 = F(L - x) \quad (3.8)$$

$$(EI)_b \cdot w_3''(x) = F \cdot (x - L) \quad (3.9)$$

$$(EI)_b \cdot w_3'(x) = \frac{1}{2} \cdot F \cdot x^2 - F \cdot L \cdot x + C_5$$

$$(EI)_b \cdot w_3(x) = \frac{1}{6} \cdot F \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot F \cdot L \cdot x^2 + C_5 \cdot x + C_6$$

Die Randbedingungen : $w_2'(x = x_2) = w_3'(x = x_2)$; $w_2(x = x_2) = w_3(x = x_2)$. Die Integral-konstante werden mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt.

$$C_5 = \frac{1}{(EI)_k} \left(\frac{1}{2} F x_2^2 - \frac{1}{2} F L x_2 - M_{pz} x_2 + C_3 \right) - \frac{1}{(EI)_b} \left(\frac{1}{2} F x_2^2 - F L x_2 - F L x_2 + C_5 \right)$$

$$C_6 = \frac{1}{(EI)_{ges}} \left(\frac{1}{6} F x_2^3 - \frac{1}{2} F L x_2^2 - \frac{1}{2} M_{pz} x_2^2 + C_3 x_2 + C_4 \right) - \frac{1}{(EI)_b} \left(\frac{1}{6} F x_2^3 - \frac{1}{2} F x_2^2 + C_5 x_2 \right)$$

Mit Hilfe der berechneten Integral-Konstanten kann die Biegelinie $w(x)$ bestimmt werden.

3.2 Ergebnisse des Modells

Als erster wird die Einwirkung des Flächenaktuators von dem Aspekt der Steifigkeitsänderung untersucht. In der Abbildung 3.3 wird zwei Biegelinie unter Kraftwirkung am freien Ende des Balkens gezeigt. Mit der blauen Linie wird der Fall des Kragbalkens mit dem Piezoaktor dargestellt. Mit der roten Linie wird ein normaler Kragbalken ohne eine Piezoaktor gezeigt. Es ist auffällig, dass der Balken mit einem geklebten Piezoaktor mehr Steifigkeit hat. Die im Kapitel 3.1 genannten Gleichungen für Euler-Bernoulli Balken wurden mit Matlab gelöst. Das erste Ergebnis ist die Form der Biegelinie, wenn der Balken gleichzeitig unter der Anregung des Piezoaktuators und der Kraftanregung.

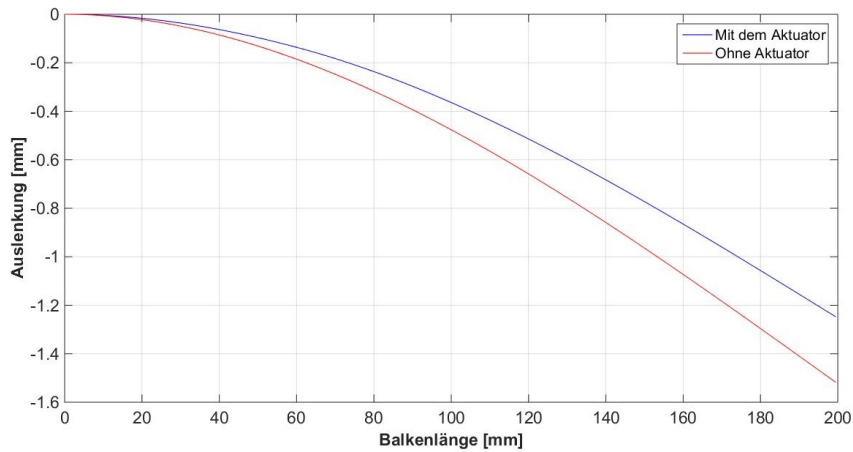


Abbildung 3.3: Biegelinie des Balkens unter nur Kraft für den Fall mit/ohne Piezoaktuator

In der Abbildung 3.4 wird die Biegelinie des Balkens unter einzelne Anregungen (allein Kraft und allein Piezoaktuator) dargestellt. Auf der anderen Seite ist das Balkensystem in

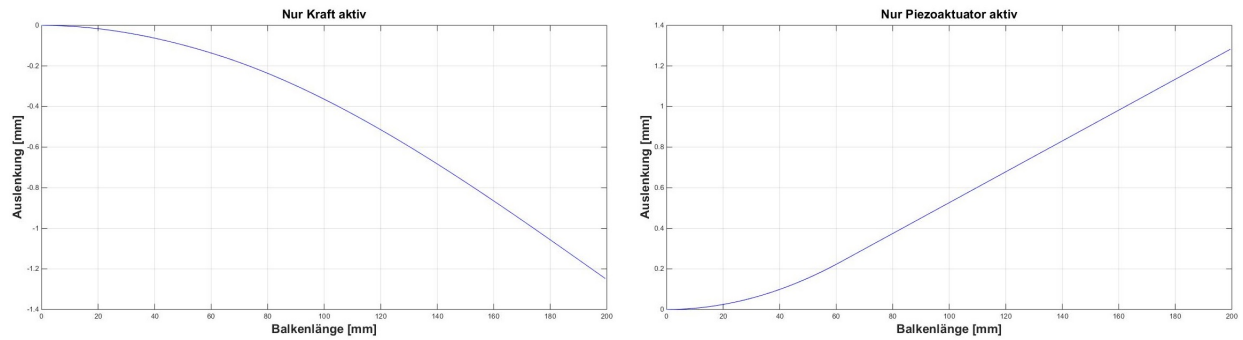


Abbildung 3.4: Biegelinie des Balkens unter nur Kraft (links) und unter nur Piezoaktuator (rechts)

der Abbildung unter beide Anregungen gleichzeitig angeregt. In dem analytischen Modell ist der Piezoaktuator zwischen eingespannter Seite und 61 mm geklebt. Die Ergebnisse dieser Analyse werden mit den Ergebnissen in der Studienarbeit [Tamer 2013] überprüft. Die hier gewählte Art der Berechnung des Piezos liefert die richtige Ergebnisse, weil die theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen Ergebnissen in der genannten Studienarbeit verglichen wurden.

In diesem Fall ist die angewendete Spannung 400 V. Von dieser Spannung wird die Kraft erzeugt, die für Moment bei der analytische Methode verwendet wird.

$$F_{400} = \frac{RK \cdot U \cdot l_0 \cdot k}{2} \quad (3.10)$$

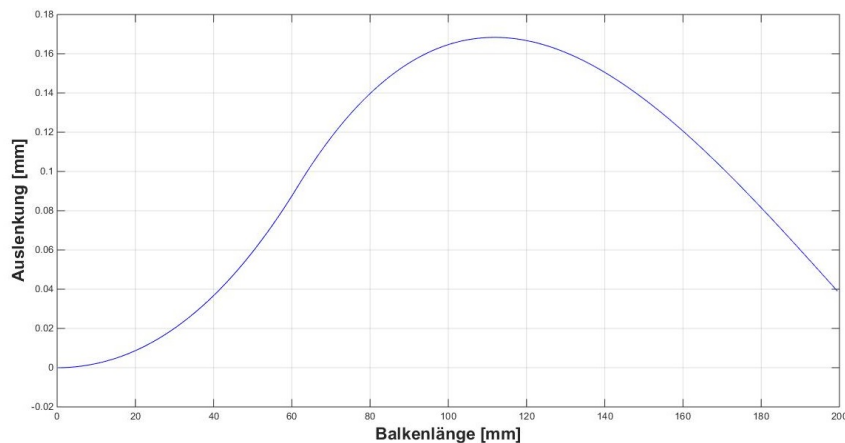


Abbildung 3.5: Biegelinie des Balkens unter Anregung von Piezo- und Kraftanregung

In der Gleichung 3.10 wird gezeigt, wie von der Spannung die Kraft berechnet wird. RK ist der Wert für relativ laterale Kontraktion ($RK=1.3$), U ist für die Spannung (400 V), $l_0 = 61\text{ mm}$ ist die Länge des Piezoaktors, k ist die Steifigkeit des Aktuators ($k=6.8\text{ N}/\mu\text{m}$). Mit der Multiplikation wird die Kraft als $F_{400} = 107.5$ berechnet [Tamer 2013].

Die angewendete Kraft am freien Ende des Balkens $F = -0.35\text{ N}$. Darüber hinaus ist die Auslenkung des Balkens eine Funktion von der Spannung des Piezoaktors und von der einwirkenden Kraft am freien Ende des Balkens. Damit man die entstehende Dehnungen genauer feststellen kann, ist es notwendig, die Dehnung am Balken abzubilden. In der Abbildung 3.6 sieht man den Moment-, Dehnungs- und Krümmungsverlauf nach der Balkenlänge unter Piezo- und Kraftanregung.

In der Mitte der Abbildung wird der Dehnungsverlauf mit zwei Linien dargestellt. Die blaue Linie zeigt die Dehnung untere Seite des Balkens und die rote Linie zeigt obere Seite des Balkens.

Da Moment und Dehnung proportional sind, zeigen beide Werte Ähnlichkeit in der Abbildung 3.6. Die Abhängigkeit zwischen Krümmung und Moment verursacht, dass die Krümmung mit dem Abstand absinkt. Außerdem ist es auffällig, dass es einen Sprung am Wert der Dehnung $x=61\text{ mm}$ (am Ende des Piezoaktors) gibt. Das liegt daran, dass es sich zwischen eingespannter Seite bis zum Ende des Piezoaktors um Moment von Kraft- und Piezoanregung handelt.

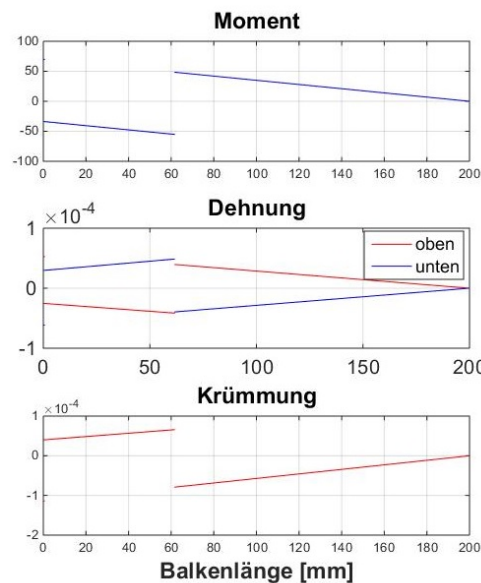


Abbildung 3.6: Moment-, Dehnungs- und Krümmungsverlauf nach Balkenlänge unter Anregung

3.3 Bestimmung der DMS-Position

Für die Aufgabe soll festgestellt werden, wo DMS geklebt wird. Der Momentverlauf des Balkensystems sollte unter Anregung untersucht werden, damit man die richtige Position bestimmen kann.

$$\varepsilon = \frac{M}{EI} \cdot \frac{h}{2} \quad (3.11)$$

M=Moment; EI=Biegesteifigkeit, h=Dicke des Balkens

In der Gleichung 3.11 wird der Zusammenhang zwischen Moment und Dehnung dargestellt. Die Abbildung 3.7 weist darauf hin, dass das entstehende Moment des Piezoaktuators nur mit der Lage des Piezoaktuators begrenzt ist.

Da der Piezoaktor ab dem Ende des Piezoaktuators keine Momentwirkung hat, ist nur die Kraft und ihr Moment wichtig für die Dehnung. Aus diesem Grund ist nur die Kraft einzeln für DMS beachtlich. Dadurch wird DMS im Gebiet III positioniert.

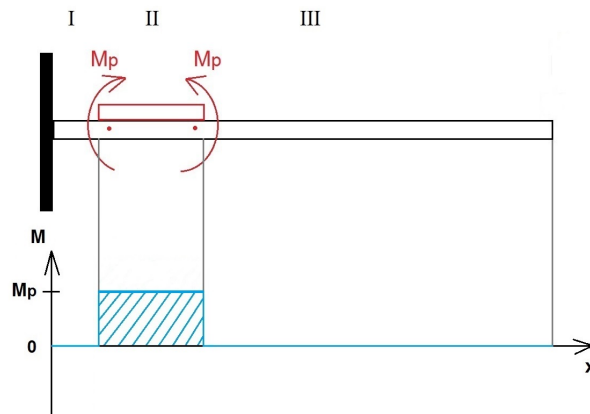


Abbildung 3.7: Momentverlauf für Piezoaktuator

3.4 Kraftberechnung durch DMS für den statischen Fall

Die Dehnung ändert sich nach dem Abstand der Anregungskraft. Außerhalb der Kraftanregung gibt es auch Piezoanregung im Balkensystem. Da der Piezoaktuator einen Moment hat, gibt es eine Wirkung auf Dehnungsverlauf.

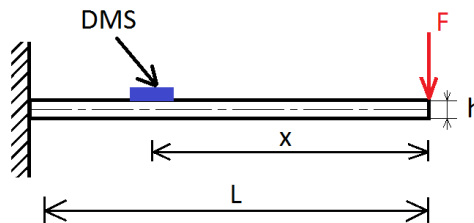


Abbildung 3.8: Darstellung des Kragbalkens mit DMS

Die Abbildung 3.8 ist eine Darstellung für einen DMS auf einem Balken. Der Abstand x in der Abbildung ist die Entfernung zwischen der Kraft F und dem Mittelpunkt von DMS. Damit man die Momentwirkung des Aktuators vernachlässigen kann, muss DMS zwischen dem Kraftpunkt und dem Flächenaktuator geklebt sein.

Die Berechnung der Kraft ist abhängig von der Dehnung. Die Herleitung der Formel ist wie unten.

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon(x) dx \rightarrow \Delta l = \varepsilon l \quad (3.12)$$

Nach der Integralrechnung ist die Dehnung Längenänderung pro Anfangslänge.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3.13)$$

Die Dehnung hat Zusammenhang mit der Spannung und die Elastizitätsmodul.

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2}$$

$$\rightarrow \varepsilon = \frac{M}{EI} \cdot \frac{h}{2}$$

Bei den Experimenten werden Standard-DMS verwendet. Der Hauptgrund dafür liegt daran, dass das für diesem Fall ausreichend ist. Das Ziel der Arbeit ist, die anregende Kraft zu bestimmen.

4 Dynamischer Fall

Die Schwingungsantwort des Balkensystems wird in diesem Teil der Arbeit unter verschiedene Anregungen untersucht. Hier geht es um die Steuerung des Balkens durch Fußpunktanregung, Piezoaktuator und Kraft. In der Abbildung 4.1 wird das Balkensystem unter oben genannten Anregungen dargestellt.

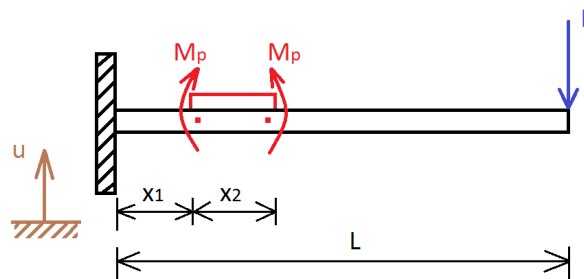


Abbildung 4.1: Darstellung des dynamischen Falls

4.1 Grundlage für dynamische Lösung (Übertragungsmatrizenverfahren)

Für die Lösung der dynamischen Aufgabe wird Übertragungsmatrizenverfahren benutzt. Das liegt daran, dass der Balken wegen des Piezoaktuators aus unterschiedlichen Querschnitten und Biegesteifigkeiten besteht [Gasch et al. 2012]. Dank dieser Methode ist es relativ einfacher das System analytisch zu modellieren. Die Theorie dieses Verfahrens wird mit Hilfe eines Kragbalkens erklärt, dessen Biegesteifigkeit EI , Dichte ρ und Querschnitt A ist. In der Abbildung 4.2 wird der Balken dargestellt. In diesem Kapitel wird erklärt, wie diese Methode bei einem Balken angewendet wird, der einen konstanten Querschnitt hat.

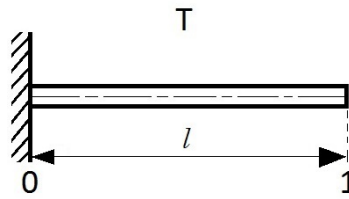


Abbildung 4.2: Übertragungsmatrizen

Übertragungsmatrize T beschreibt die Zustandsgrößen (Auslenkung, Neigung, Moment und Querkraft) von Punkt 1 zufolge der Zustandsgrößen von Punkt 0. Der Bewegungsverlauf des Balkens ist wie unten.

$$EIw^{IV} + \rho A\ddot{w} = 0 \quad (4.1)$$

In der Gleichung $w(x, t)$ ist eine Produktfunktion von der Biegelinie $W(x)$ und von der Zeitfunktion $T(t)$.

$$w(x, t) = W(x) \cdot T(t) \quad (4.2)$$

Die Gleichung 4.1 wird durch die Formel 4.2 umformuliert.

$$EITW^{IV} + \rho AW\ddot{T} = 0$$

Der örtliche Teil der Gleichung wird auf einer Seite gesammelt und zu einem Konstant ausgeglichen.

$$\frac{EI}{\rho A} \cdot \frac{W^{IV}}{W} = -\frac{\ddot{T}}{T} = \omega^2$$

$$\frac{W^{IV}}{W} = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 \rightarrow \lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2$$

Die Biegelinie wird mit hyperbolischen und trigonometrischen Funktionen in Gleichung 4.3 umgeschrieben. Mit dieser Rechnung wird der örtliche Teil der Balkenschwingung gelöst, die abhängig von λ_i bzw. von der Eigenfrequenz ω_i ist. Durch die Gleichung findet

man die Eigenformen.

$$W(x) = A_1 \cosh(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) + A_3 \sinh(\lambda x) + A_4 \sin(\lambda x) \quad (4.3)$$

Durch die Rayleigh-Funktionen können A_i Konstante als a_i umgeschrieben werden.

$$A_1 = a_1 + a_3, A_2 = a_1 - a_3, A_3 = a_2 + a_4, A_4 = a_2 - a_4$$

$$W(x) = a_1(\cosh(\lambda x) + \cos(\lambda x)) + a_2(\sinh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) + a_3(\cosh(\lambda x) - \cos(\lambda x)) + a_4(\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda x))$$

Danach wird die Biegeliniegleichung mit Rayleigh-Funktionen $R_i(x)$ in Gleichung 4.4 geschrieben.

$$W(x) = a_1 R_1(x) + a_2 R_2(x) + a_3 R_3(x) + a_4 R_4(x) \quad (4.4)$$

Die Gleichung 4.4 wird in Gleichung 4.5 Matrizenform umgeschrieben.

$$W(x) = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Mit den Randbedingungen eines Eingespannt-Frei-Balkens wird die Koeffizienten festgestellt. Dafür muss die Biegeliniegleichung abgeleitet werden.

$$W(x) = a_1(\cosh(\lambda x) + \cos(\lambda x)) + a_2(\sinh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) + a_3(\cosh(\lambda x) - \cos(\lambda x)) + a_4(\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda x)) \quad (4.6)$$

Wenn $x = 0$ in der Gleichung 4.6 und in ihrer Ableitungen nach x wird die a_1 Konstante berechnet.

$$W(x=0) = 2a_1 \rightarrow a_1 = \frac{W(0)}{2}$$

Mit der ersten Ableitung (nach x) der Gleichung 4.6 wird die Neigung erhalten. Wenn $x=0$ in der Gleichung eingesetzt wird, ist a_2 Wert zu berechnen.

$$W'(x) = a_1\lambda(\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda x)) + a_2\lambda(\cosh(\lambda x) + \cos(\lambda x)) + a_3\lambda(\sinh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) + a_4\lambda(\cosh(\lambda x) - \cos(\lambda x)) \quad (4.7)$$

$$W'(x=0) = 2a_2\lambda \rightarrow a_2 = \frac{W'(0)}{2\lambda}$$

Mit der Ableitung(nach x) von W' erhält man die Krümmung. Damit man a_3 Wert finden kann, wird $x=0$ eingesetzt.

$$W''(x) = a_1\lambda^2(\cosh(\lambda x) - \cos(\lambda x)) + a_2\lambda^2(\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda x)) + a_3\lambda^2(\cosh(\lambda x) + \cos(\lambda x)) + a_4\lambda^2(\sinh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) \quad (4.8)$$

$$W''(x=0) = 2a_3\lambda^2 \rightarrow M(0) = 2a_3\lambda^2 EI \rightarrow a_3 = \frac{M(0)}{2\lambda^2 EI}$$

Mit der dritten Ableitung von Biegelinie nach x wird die Gleichung 4.9 erhalten.

$$W'''(x) = a_1\lambda^3(\sinh(\lambda x) + \sin(\lambda x)) + a_2\lambda^3(\cosh(\lambda x) + \cos(\lambda x)) + a_3\lambda^3(\sinh(\lambda x) - \sin(\lambda x)) + a_4\lambda^3(\cosh(\lambda x) - \cos(\lambda x)) \quad (4.9)$$

Indem $x=0$ in der Gleichung 4.9 eingestellt wird, wird a_4 Wert wie unten berechnet.

$$W'''(x=0) = 2a_4\lambda^3 \rightarrow Q(0) = 2a_4\lambda^3 EI \rightarrow a_4 = \frac{Q(0)}{2\lambda^3 EI}$$

Nach der Bestimmung der Koeffizienten wird der Vektor für die Koeffizienten umformuliert. Die Gleichung 4.5 wird mit den berechneten a_i Werten arrangiert. Dieses mal werden Auslenkung, Neigung, Moment und Querkraft für $x=0$ statt a_i Koeffizienten geschrieben.

$$\begin{Bmatrix} W(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{Bmatrix}_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} R_1(x) & \frac{R_2(x)}{\lambda} & \frac{-R_3(x)}{\lambda^2 EI} & \frac{-R_4(x)}{\lambda^3 EI} \\ \lambda R_4(x) & R_1(x) & \frac{-R_2(x)}{\lambda EI} & \frac{-R_3(x)}{\lambda^2 EI} \\ -R_3(x)\lambda^2 EI & -R_4(x)\lambda EI & R_1(x) & \frac{R_2(x)}{\lambda} \\ -R_2(x)EI\lambda^3 & -R_3(x)EI\lambda^2 & R_4(x)\lambda & R_1(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W(0) \\ \varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix}_0 \quad (4.10)$$

Auf der linken Seite der Gleichung wird die Werte an der Stelle x des Balkens geschrieben. Auf der rechten Seite ist der Zustandsvektor an der Stelle $x=0$. Die Gleichung 4.10 kann wie unten abgekürzt werden.

$$x(x) = T(x, \lambda) \cdot x(0)$$

Die Übertragungsmatrize ist in der letzten Version abhängig von x (die Länge des Balkens) und λ .

4.1.1 Kragbalken unter Kraftanregung

Damit man die Lösungshinweis für Kraft- und Fußpunktanregung deutlich erklären kann, wird hier zwei Anregungsarten untersucht. In der Abbildung 4.3 wird das Balkensystem unter Kraftanregung dargestellt.

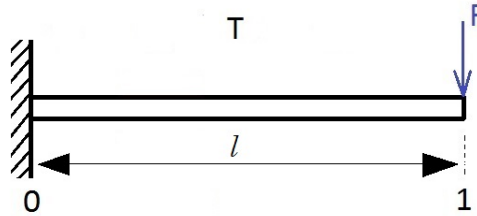


Abbildung 4.3: Kragbalken unter Kraftanregung

Am freien Endpunkt des Balkens regt die Kraft in vertikaler Richtung an. Diese Kraft wird in der Gleichung 4.10 in die linke Seite ($Q(l) = F$) als Querkraft angesetzt. Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen (Rayleigh-Funktionen) werden als abgekürzt geschrieben.

$$C = \cosh(\lambda l), c = \cos(\lambda l), S = \sinh(\lambda l), s = \sin(\lambda l)$$

$$R_1 = (C + c); R_2 = (S + s); R_3 = (C - c); R_4 = (S - s)$$

$$\lambda = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$$

Mit der Hilfe der Randbedingungen $M(l) = 0$, $Q(l) = F$, $W(0) = 0$ und $\varphi = 0$ sieht die Matrizengleichung für den Kragbalken unter Kraftanregung wie in der Gleichung 4.11 aus. Diese Gleichung ist nötig $M(0)$ und $Q(0)$ zu berechnen.

$$\begin{Bmatrix} W(l) \\ \varphi(l) \\ 0 \\ F \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} R_1(l) & \frac{R_2(l)}{\lambda} & \frac{-R_3(l)}{\lambda^2 EI} & \frac{-R_4(l)}{\lambda^3 EI} \\ \lambda R_4(l) & R_1(l) & \frac{-R_2(l)}{\lambda EI} & \frac{-R_3(l)}{\lambda^2 EI} \\ -R_3(l)\lambda^2 EI & -R_4(l)\lambda EI & R_1(l) & \frac{R_2(l)}{\lambda} \\ -R_2(l)EI\lambda^3 & -R_3(l)EI\lambda^2 & R_4(l)\lambda & R_1(l) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

Damit man $M(0)$ und $Q(0)$ finden kann, werden die Gleichungen aus der dritten und vierten Zeile in der Gleichung 4.11 geschrieben.

Die Rechnung aus der Zeile drei und vier werden unten mit Formel 4.12 und 4.13 gegeben.

$$0 = M(0) \cdot \frac{C+c}{2} + Q(0) \cdot \frac{S+s}{2\lambda} \quad (4.12)$$

$$F = M(0) \cdot \frac{\lambda \cdot (S-s)}{2} + Q(0) \cdot \frac{C+c}{2} \quad (4.13)$$

Die Querkraft an der Stelle $x=0$ wird in der Gleichung 4.14 geschrieben.

$$Q(0) = \frac{F}{\frac{C+c}{2} - \frac{S^2-s^2}{2(C+c)}} \quad (4.14)$$

Das Moment an der Stelle $x=0$ wird in der Gleichung 4.15 geschrieben.

$$M(0) = -\frac{F}{\lambda} \cdot \frac{\frac{S+s}{2}}{\left(\frac{C+c}{2}\right)^2 - \frac{S^2-s^2}{4}} \quad (4.15)$$

Daraus ergeben sich die Querkraft und das Moment an der eingespannten Seite des Balkens. Die gefundene $M(0)$ und $Q(0)$ Werte werden in die Gleichung 4.11 eingesetzt.

$$W(l) = \frac{F}{2\lambda^2} \left[\frac{C-c}{EI} \cdot \frac{S+s}{2\lambda} \cdot \frac{1}{\left(\frac{C+c}{2}\right)^2 - \frac{S^2-s^2}{4}} - \frac{S-s}{\lambda EI} \cdot \frac{1}{\frac{C+c}{2} - \frac{\lambda(S^2-s^2)}{2(C+c)}} \right] \quad (4.16)$$

So erhält man eine Gleichung (Gleichung 4.16) von der ersten Zeile für die Auslenkung an der Stelle $x=l$ am Balken. Mit dieser Gleichung wird die Biegelinie des Balkens mit der Länge l bestimmt.

4.1.2 Kragbalken unter Fußpunktanregung

Die zweite Art der Anregung ist Fußpunktanregung. Die Darstellung dafür ist in der Abbildung 4.4 gezeigt.

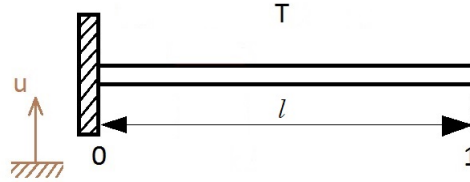


Abbildung 4.4: Kragbalken unter Fußpunktanregung

Mit der Randbedingungen der Fußpunktanregung sieht die Gleichung wie in der Gleichung 4.17 aus.

$$\begin{Bmatrix} W(l) \\ \varphi(l) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} R_1(l) & \frac{R_2(l)}{\lambda} & \frac{-R_3(l)}{\lambda^2 EI} & \frac{-R_4(l)}{\lambda^3 EI} \\ \lambda R_4(l) & R_1(l) & \frac{-R_2(l)}{\lambda EI} & \frac{-R_3(l)}{\lambda^2 EI} \\ -R_3(l)\lambda^2 EI & -R_4(l)\lambda EI & R_1(l) & \frac{R_2(l)}{\lambda} \\ -R_2(l)EI\lambda^3 & -R_3(l)EI\lambda^2 & R_4(l)\lambda & R_1(l) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ 0 \\ M(0) \\ Q(0) \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Aus der Gleichung 4.10 schreibt man von der dritten und vierten Zeilen die Gleichungen, damit man $M(0)$ und $Q(0)$ berechnen kann.

$$0 = u \cdot \frac{-\lambda^2 EI(C - c)}{2} + M(0) \cdot \frac{(C + c)}{2} + Q(0) \cdot \frac{(S + s)}{2\lambda} \quad (4.18)$$

$$0 = u \cdot \frac{-\lambda^2 EI(S + s)}{2} + M(0) \cdot \frac{\lambda(S - s)}{2} + Q(0) \cdot \frac{(C + c)}{2} \quad (4.19)$$

Indem das $Q(0)$ Wert von Gleichung 4.18 in die Gleichung 4.19 geschrieben wird, kann die Querkraft an der Stelle $x=0$ unter Fußpunktanregung bestimmt werden.

$$Q(0) = u\lambda^2 EI \cdot \frac{-(C - c) \cdot \frac{\lambda(S - s)}{(C + c)} + (S + s)}{(C + c) - \frac{(S^2 - s^2)}{(C + c)}} \quad (4.20)$$

Das erhaltene $Q(0)$ Wert wird in Gleichung 4.18 geschrieben. So wird das Moment an der Stelle $x=0$ unter Fußpunktanregung berechnet.

$$M(0) = u\lambda^2 EI \cdot \left[\frac{(C-c)}{(C+c)} + \frac{(C-c) \cdot \frac{\lambda(S^2-s^2)}{(C+c)} + \frac{(S+s)^2}{\lambda}}{(C+c)^2 - (S^2-s^2)} \right] \quad (4.21)$$

Nach der Bestimmung von $Q(0)$ und $M(0)$ kann die erste Zeile der Gleichung 4.17 arrangiert werden. Auf diese Weise kann die Biegelinie des Balkens festgestellt werden.

$$W(l) = u\lambda^2 EI \left[\frac{(C+c)}{2\lambda^2 EI} - \left(\frac{C-c}{C+c} - \frac{(C-c) \cdot \frac{\lambda(S^2-s^2)}{C+c} - \frac{(S+s)^2}{\lambda}}{(C+c)^2 - \lambda(S-s)(C+c)} \right) \cdot \left(\frac{C-c}{\lambda^2 EI} \right) \right. \\ \left. + \frac{(C-c) \cdot \frac{\lambda(S-s)}{C+c} - (S+s)}{(C+c) - \frac{(S+s)}{\lambda} \cdot \frac{\lambda(S-s)}{C+c}} \cdot \frac{S-s}{\lambda^3 EI} \right] \quad (4.22)$$

Mit Hilfe von Gleichungen 4.21 und 4.20 kann die Auslenkung des Balkens an der Stelle $x=l$ unter Fußpunktanregung berechnet werden. Die Gleichung dafür ist unten geschrieben.

4.2 Analytisches Modell

In diesem Kapitel wird das Matrizenübertragungsverfahren erklärt, wenn der Balken unterschiedliche Querschnitte hat. In der Aufgabe beschäftigt sich man mit einem Balken mit Piezoaktuator. Der erste Schritt für die Lösung dieses Falls ist die Feststellung der Eigenfrequenz des Balkensystems. Die Bestimmung der Eigenfrequenz ist nötig für den Resonanzfall. In dieser Arbeit wird das System bis unterhalb der zweiten Eigenfrequenz untersucht. Die Darstellung des Systems ist in der Abbildung 4.5. Da das System aus drei Gebieten entsteht, braucht man drei Übertragungsmatrizen zu definieren.

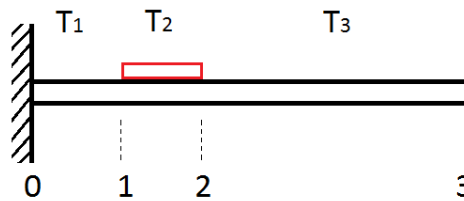


Abbildung 4.5: Kragbalken mit Piezoaktuator

Die unten geschriebene Gleichungen bezeichnen die Abhängigkeit zwischen Balkenpunkten.

$$x_1 = T_1 \cdot x_0; x_2 = T_2 \cdot x_1; x_3 = T_3 \cdot x_2$$

Gleichung 4.23 beschreibt den Zustand von Punkt 3 nach Punkt 0.

$$x_3 = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot x_0 \quad (4.23)$$

$$\begin{Bmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{44} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_0 \quad (4.24)$$

Die Randbedingungen für einseitig eingespannten Balken sind

$$W(x=0) = 0; \varphi(x=0) = 0; M(x=L) = 0; Q(x=L) = 0. \text{ Da } W(x=0) = 0; \varphi(x=0) = 0$$

sind, müssen erste und zweite Spalte der Matrix nicht multipliziert werden. Die dritten und vierten Zeile und Spalte der Matrix sind genug für die Determinantenfunktion.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} t_{33} & t_{44} \\ t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_0 \quad (4.25)$$

$$\det(t) = t_{33}t_{44} - t_{34}t_{43}$$

Determinante von t aus der Gleichung 4.25 ist eine Funktion von ω . Durch diese Funktion berechnet man die Eigenfrequenzen des Balkensystems. In der Abbildung 4.6 wird der Verlauf von Determinante abhängig von Anregung gesehen.

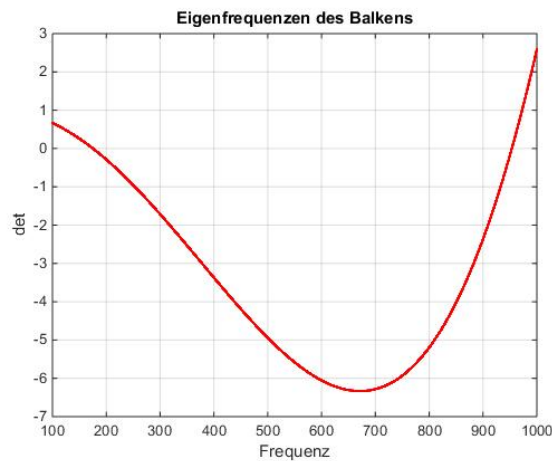


Abbildung 4.6: Determinantenverlauf und Eigenfrequenzen

Nach dem Determinantenverlauf kann man die Eigenfrequenzen des Balkensystems numerisch bestimmen, wo Determinante gleich null ist. Darüber hinaus ist die erste Eigenfrequenz $\omega_1 = 175.2 \text{ rad/s}$.

Die Systemanregungen bzw. Kraft-, Piezo- und Fußpunkt werden einzeln untersucht. Danach werden die Ergebnisse durch Superpositionierung summiert. Als erstes wird die Kraftanregung mit Übertragungsmatrizenverfahren gelöst. In der Abbildung 4.7 sieht man das Systemmodell.

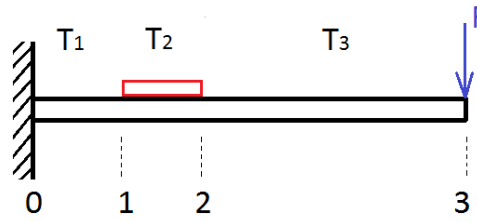


Abbildung 4.7: Kragbalken mit Piezoaktuator unter Kraftanregung

Die allgemeine Gleichung des Balkens unter Kraftanregung ist wie unten. Der Zustandsvektor für Position 3 ist als x_{3f} (Indices f für die Kraft) dargestellt.

$$x_{3f} = T \cdot x_0$$

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix}_{3f} = T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0 \quad (4.26)$$

Der Zustandsvektor und Übertragungsmatrize werden in der Gleichung 4.26 dargestellt. An dem freien Ende des Balkens gibt es eine Kraftanregung in vertikaler Richtung. Diese Kraft wird in der Matrize als Querkraft auf der linken Seite der Gleichung 4.27 (Zustandsvektor für Punkt 3) geschrieben.

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ 0 \\ F \end{pmatrix}_{3f} = T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0 \quad (4.27)$$

Die Randbedingungen für Einspannt-Frei-Balken sind, dass die Auslenkung und die Neigung an der eingespannten Seite des Balkens gleich null. Aber Moment-, und Querkraftwerte hier sind nicht bestimmt. Deswegen müssen diese Werte für jede Art der Anregung neu berechnet werden. In der Gleichung 4.28 wird die Matrizengleichung für

die Moment- und Querkraftwerte für Kraftanregung definiert.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}_{3f} = \begin{bmatrix} t_{33} & t_{44} \\ t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix}_0 \quad (4.28)$$

$$M_f(0) = -\frac{t_{34}}{t_{33}}Q(0)$$

$$Q_f(0) = \frac{F}{t_{44} - t_{43} \cdot \frac{t_{34}}{t_{33}}}$$

Nach der Bestimmung von $M(0)$ und $Q(0)$ kann die Biegeliniengleichung für den Fall der Kraftanregung geschrieben.

$$W_f(x) = t_{23} \cdot M(0) + t_{24} \cdot Q(0) \quad (4.29)$$

Die Schwingungsantwort des Balkens unter Kraftanregung mit der Anregungsfrequenz $\Omega = 1$ rad/s wird mit der Gleichung 4.29 bestimmt. In der Abbildung 4.8 wird die Form des Balkens dargestellt.

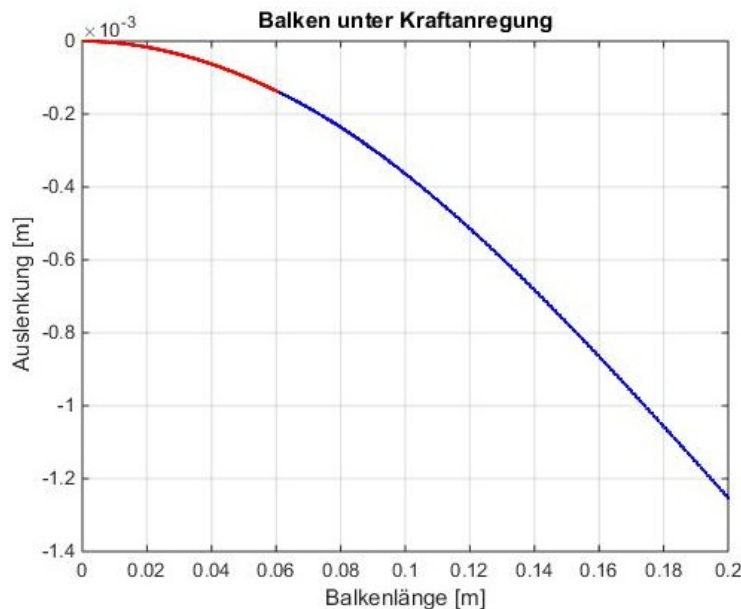


Abbildung 4.8: Kragbalken mit Piezoaktuator unter Kraftanregung

Der nächste Schritt für die Lösung des Balkensystems ist die Lösung der Fußpunktanregung. In der Abbildung 4.9 wird dargestellt, wie die Fußpunktanregung das Balkensystem beeinflusst. Die rote Linie in der Abbildung ist für die Seite, auf der der Piezoaktuator geklebt ist.

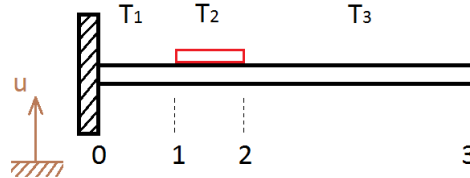


Abbildung 4.9: Kragbalken mit Piezoaktuator unter Fußpunktanregung

Die Systemgleichung ist im Allgemein gleich wie in Gleichung 4.26. Aber die Definition der Anfangsbedingungen unterscheiden die Lösung. In dem Fall der Fußpunktanregung wird $W(x=0)$ als u geschrieben.

Mit der Eingabe der Fußpunktanregung (Indices u für den Fußpunkt) sieht die Gleichung 4.30 wie unten aus.

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{3u} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{44} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0 \quad (4.30)$$

Aus der Gleichung 4.30 berechnet man $M(0)$ und $Q(0)$.

$$0 = t_{31}u + t_{33}M(0) + t_{34}Q(0) \rightarrow M_u(0) = -\frac{ut_{31} + Q(0)t_{34}}{t_{33}}$$

$$0 = ut_{43} + M(0)t_{43} + Q(0)t_{44} \rightarrow Q_u(0) = u \cdot \frac{t_{43} - t_{43} \cdot \frac{t_{31}}{t_{33}}}{t_{43} \cdot \frac{t_{34}}{t_{33}} - t_{44}}$$

Die Querkraft und das Moment unter Fußpunktanregung werden an der Stelle $x=0$ bestimmt. Mit Hilfe dieser Werten kann der Zustandsvektor für das freie Ende des

Balkens definieren.

$$W_u(x) = \frac{1}{2} \cdot [t_{11} \cdot u + t_{13} \cdot M(0) + t_{14} \cdot Q(0)] \quad (4.31)$$

In der Gleichung 4.31 wird die Biegelinie des Balkens unter Fußpunktanregung gegeben. Mit Hilfe dieser Gleichung kann man die Form des Balkens unter Anregung bestimmen. In der Abbildung 4.10 wird die Schwingungsantwort des Systems unter Fußpunktanregung ($\Omega=1$ rad/s) dargestellt.

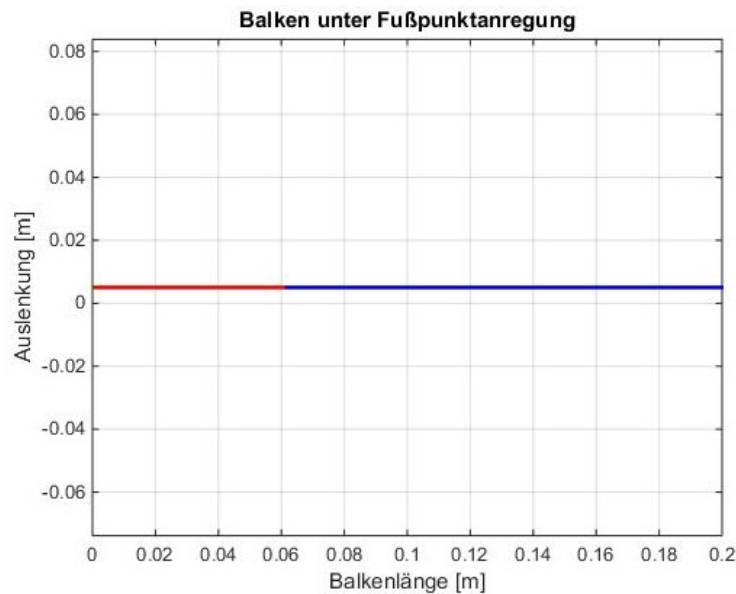


Abbildung 4.10: Kragbalken mit Piezoaktuator unter Fusspunktanregung

In der Abbildung 4.10 ist es auffällig, dass die Linie gerade ist. Das liegt daran, dass die Anregungsfrequenz ganz klein ist. Aus diesem Grund verhält das System quasi statisch.

Der letzte Schritt für die analytische Analyse des Systems ist die Modellierung der Piezoanregung. Das System unter Piezoanregung ist in der Abbildung 4.11 dargestellt. Die rote Linie in der Abbildung ist für die Seite, auf der der Piezoaktuator geklebt ist.

In der Berechnung von Zustandsvektor unter Piezoaktuatoranregung definiert man zwei zusätzliche Punkte, die auf der linken und rechten Seite des originalen Punktes,

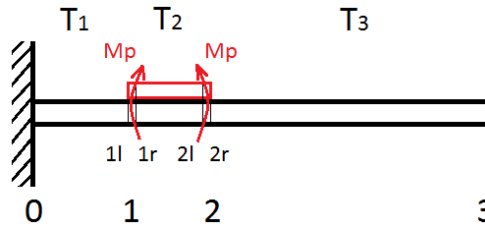


Abbildung 4.11: Kragbalken mit Piezoaktuator unter Piezoanregung

z.B. 1l ist links von Punkt 1. Es wird angenommen, dass das genannte Moment zwischen 1l und 1r bzw. 2l-2r einwirkt.

Die Gleichung definiert die Zustandsabhängigkeit von der eingespannten Seite bis zum Pünktchen 1l.

$$x_1^l = T_1 x_0 \quad (4.32)$$

Für den Zustandsvektor x_1^r wird die Momentwirkung in der Gleichung 4.33 einbezogen.

$$x_1^r = x_1^l + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Die Gleichung 4.32 wird in die Gleichung 4.33 eingesetzt.

$$x_1^r = T_1 x_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2^l = T_2 x_1^r \quad (4.34)$$

Dasselbe Methode wird dieses Mal für den Punkt 2 verwendet und am Ende wird die Gleichung 4.36 erhalten.

$$x_2^l = T_2 T_1 x_0 + T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2^r = x_2^l + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_2^r = T_2 T_1 x_0 + T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = T_3 x_2^r \quad (4.35)$$

$$x_{3p} = T_3 T_2 T_1 x_0 + T_3 T_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix} + T_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$T_3 T_2 T_1 = t^{321}; T_3 T_2 = t^{32}; T_3 = t^3$$

Die Matrizenmultiplikationen werden wie oben kürzer geschrieben.

$$\begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix}_{3p} = \begin{bmatrix} t_{11}^{321} & t_{12}^{321} & t_{13}^{321} & t_{14}^{321} \\ t_{21}^{321} & t_{22}^{321} & t_{23}^{321} & t_{24}^{321} \\ t_{31}^{321} & t_{32}^{321} & t_{33}^{321} & t_{34}^{321} \\ t_{41}^{321} & t_{42}^{321} & t_{43}^{321} & t_{44}^{321} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W \\ \varphi \\ M \\ Q \end{pmatrix}_0 + \begin{bmatrix} t_{11}^{32} & t_{12}^{32} & t_{13}^{32} & t_{14}^{32} \\ t_{21}^{32} & t_{22}^{32} & t_{23}^{32} & t_{24}^{32} \\ t_{31}^{32} & t_{32}^{32} & t_{33}^{32} & t_{34}^{32} \\ t_{41}^{32} & t_{42}^{32} & t_{43}^{32} & t_{44}^{32} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} t_{11}^3 & t_{12}^3 & t_{13}^3 & t_{14}^3 \\ t_{21}^3 & t_{22}^3 & t_{23}^3 & t_{24}^3 \\ t_{31}^3 & t_{32}^3 & t_{33}^3 & t_{34}^3 \\ t_{41}^3 & t_{42}^3 & t_{43}^3 & t_{44}^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_{pz} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Die Gleichung 4.37 zeigt die Lösung für den Fall der Piezoanregung (Indices p für den Piezoaktuator) die unterschiedliche Produkten der Übertragungsmatrizen werden mit

den hochgestellten Indices definiert. Unten werden $M(0)$ und $Q(0)$ für diese Aufgabe geschrieben.

$$0 = t_{33}^{321} M(0) + t_{34}^{321} Q(0) - t_{33}^{32} M_{pz} + t_{33}^3 M_{pz}$$

$$M_p(0) = \frac{M_{pz}(t_{33}^{32} - t_{33}^3) - Q(0)t_{34}^{321}}{t_{33}^{321}}$$

$$Q_p(0) = M_{pz} \cdot \frac{\frac{t_{33}^{32} - t_{33}^3}{t_{33}^{321}} \cdot t_{43}^{321} + t_{43}^3 - t_{43}^{32}}{\frac{t_{34}^{321} \cdot t_{43}^{321}}{t_{33}^{321}} - t_{44}^{321}} \quad \text{Die Querkraft und das Moment unter}$$

Piezoanregung werden an der Stelle $x=0$ bestimmt. Mit Hilfe dieser Werten kann der Zustandsvektor für das freie Ende des Balkens definieren.

$$W_{3p} = t_{13}^{321} \cdot M(0) + t_{14}^{321} \cdot Q(0) - t_{13}^{32} \cdot M_{pz} + t_{13}^3 \cdot M_{pz} \quad (4.38)$$

In der Gleichung 4.38 wird die Biegelinie des Balkens unter Piezoanregung gezeigt. In der Abbildung 4.12 wird die Schwingungsantwort des Balkens unter Piezoanregung ($\Omega=1$ rad/s) dargestellt. Die rote Linie in der Abbildung ist für die Seite, auf der der Piezoaktuator geklebt ist.

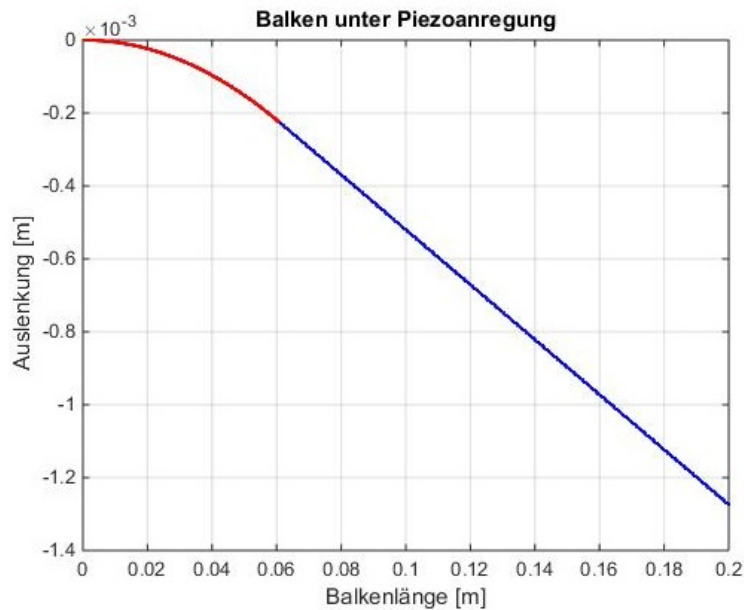


Abbildung 4.12: Kragbalken mit Piezoaktuator unter Piezoanregung

Nach der Lösung der örtlichen Funktion muss diese Lösung mit dem zeitlichen Verlauf und der frequenzabhängige Vergrößerungsfaktor verbunden werden, weil die gesamte Lösung (Gleichung 4.39) zeitliche Anregung beinhaltet. Außerdem hat Vergrößerungsfaktor einen Einfluss auf Bestimmung der Amplitude und Phasenlage der Eigenformen [Sinapius 2013-2].

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^N V_i(\Omega) \phi_i(x) e^{j\Omega t} \quad (4.39)$$

$V_i(\Omega)$: Der frequenzabhängige Vergrößerungsfaktor.

$\phi_i(x)$: Die Eigenform.

$e^{j\Omega t}$: Der Zeitverlauf.

$$V_i(\Omega) = \frac{1}{M_i(-\Omega^2 + j2\Omega\omega_i\xi_i + \omega^2)}$$

M_i ist für die modale Masse, Ω ist für die Anregungsfrequenz, ω ist für die Eigenfrequenz, ξ ist für das Dämpfungs-konstant geschrieben. Die Dämpfung wird durch massen- und steifigkeitsproportionale Konstante wie unten berechnet [Sinapius 2013-2].

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{c_m}{\omega} + c_k \cdot \omega \right)$$

c_m :Konstant für die massenproportionale Dämpfung,

c_k :Konstant für die steifigkeitsproportionale Dämpfung.

Bei der Berechnungen werden die beiden Werte als 0.01 genommen.

Die Abbildung 4.13 zeigt die Auslenkung des Balkenendpunktes, die abhängig von den unterschiedlichen Dämpfungskonstanten. Als Anregungsfrequenz in der Abbildung wird die numerisch bestimmte Eigenfrequenz ($\Omega = 175.2$ rad/s)benutzt. Mit der Zunahme der Dämpfung wird die Auslenkung des Endpunktes geringer.

4.3 Ergebnisse des Modells

Der eindimensionaler Balkenfall wird analytisch untersucht. Unter Kraft-, Piezo- und Fußpunktanregungen entstehen Dehnungen am Balken. In der Gleichung 4.40 wird der

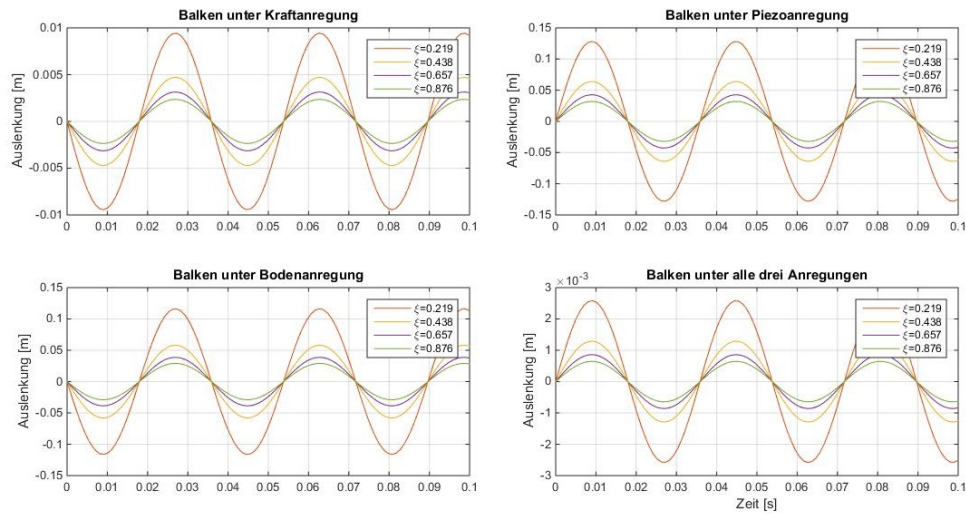


Abbildung 4.13: Auslenkung des Endpunktes abhängig von der Dämpfung

Zusammenhang zwischen Dehnung und Moment gezeigt.

$$\varepsilon = \frac{M}{E \cdot I} \cdot \frac{h}{2} \quad (4.40)$$

In der Gleichung werden M für Moment, EI für Biegesteifigkeit, h für die Dicke des Balkens verwendet. Moment wird von dem Zustandsvektor x_3 genommen. Die Biegesteifigkeit wird nach reinem Balken berechnet, weil die Dehnung im Bereich zwischen dem Ende des Piezoaktors und dem Endpunkt des Balkens untersucht wird. Für die Berechnung der Dehnung wird ein Punkt auf dem Balken ausgewählt. Dieser

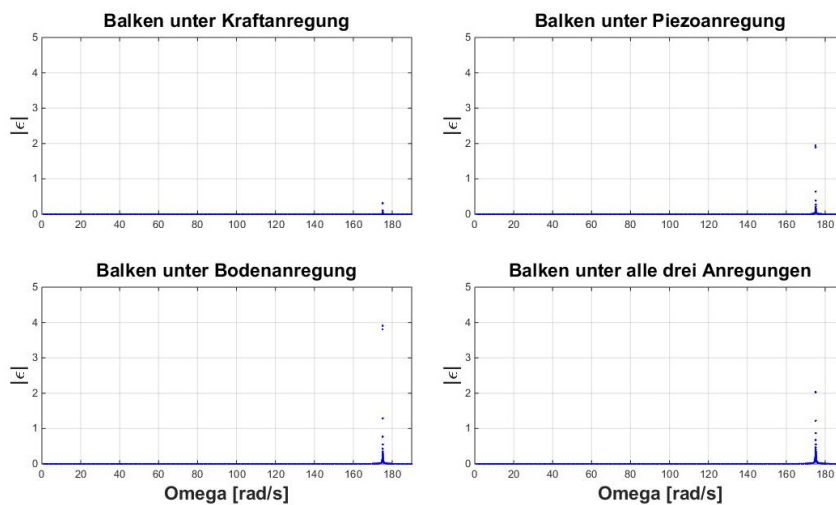


Abbildung 4.14: Dehnungsergebnisse des Balkens unter Anregung

Punkt ist 85 mm entfernt von der eingespannten Seite des Balkens. Das Verhalten von der Dehnung wird nach der Änderung der Frequenz untersucht. Die Abbildung 4.14 zeigt der Änderung der Dehnung unter einzelne Anregungen und unter alle drei gleichzeitig. Auf der x-Achse ist die Eigenkreisfrequenz und auf der y-Achse ist der Betrag der Dehnung dargestellt. In der Abbildung 4.15 wird die Dehnungsänderung nach

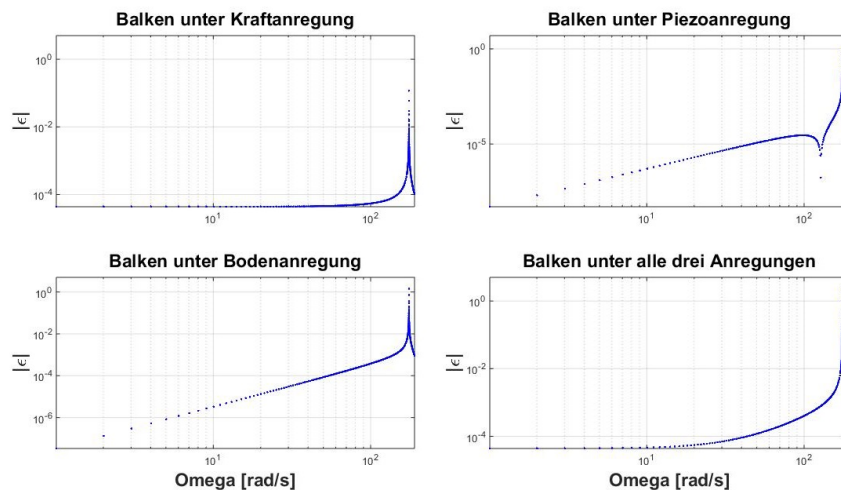


Abbildung 4.15: Logarithmische Dehnungsergebnisse des Balkens unter Anregung

Anregungsfrequenz dargestellt. Das Bild zeigt die Fälle für jede Art der Anregung und alle drei Anregungen gleichzeitig.

5 Mehrdimensionales Problem

Bisher wird das Balkensystem für eindimensionale Bewegung (in vertikaler Richtung) untersucht. In dieser Abschnitt der Arbeit wird andere Varianten der Bewegung (in mehrere Richtungen) untersucht.

5.1 Definition des Problems

In diesem Kapitel wird erklärt, wie das mehrdimensionale Problem ist. Ein kreuzförmiges Balken, das in der Mitte eine Masse hat, hat dreidimensionale Bewegungsfähigkeit. In der Abbildung 5.1 wird ein Modell für den dreidimensionalen Fall dargestellt. Mit blau wird die Kraftanregung symbolisiert. An Rändern der Balken wird das System zu einer Grundplatte festgestellt, die sich Fußpunktanregung u (mit grün gezeigt) bewegt. Außerdem gibt es Piezoanregung im System, die mit orange dargestellt ist.

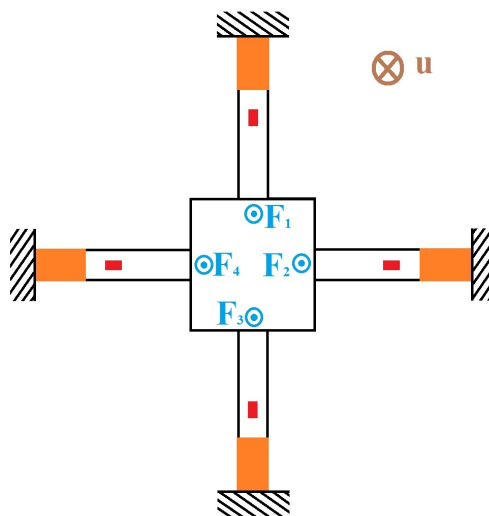


Abbildung 5.1: Dreidimensionaler Fall

Damit man einen Lösungshinweis für den dreidimensionalen Fall erstellen kann, muss das System symmetrisch betrachtet werden. In der Abbildung 5.2 wird die symmetrische Form des Balkensystems gezeigt. In der Darstellung wird so angenommen, dass das halbe Balkensystem ein fest-fest Balken ist. In der Mitte des System gibt es eine Masse.

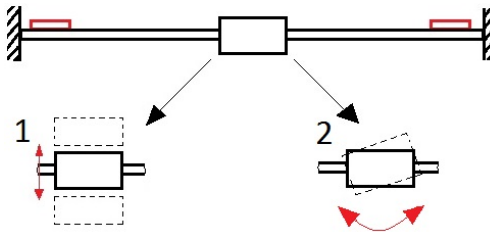


Abbildung 5.2: Zweidimensionale Bewegung

Die Abbildung 5.2 weist auf die zweidimensionale Bewegung des Systems hin. Eine Bewegung ist der Hub der Masse in vertikaler Richtung und die zweite Bewegung ist die Drehbewegung der Masse unter Anregung.

5.2 Vorgehensweise zur Lösung

Die Lösung für die mehrdimensionale Bewegung ist analytisch nur mit sehr großem Aufwand möglich. Das Übertragungsmatrizenverfahren ist eine geeignete Methode zur Lösung in diesem Fall, weil das Balkensystem keinen konstanten Querschnitt (wegen des Piezoaktuators und der Masse am Ende) hat. In der Abbildung 5.3 wird ein Modell für das Balkensystem unter Anregung der Piezoaktoren angegeben. Für die Lösung des Problems wird das System von der Mitte abgeschnitten, damit die Rechnung einfacher werden kann. So wird ein Viertelmodell für das Balkensystem entwickelt. Links in der Abbildung 5.3 wird die vertikale Bewegung der Masse und rechts wird die Drehbewegung der Masse gezeichnet. Mit den geeigneten Randbedingungen ist es möglich die Auslenkung und Drehwinkel der Masse zu finden.

Das Balkensystem wird in Gebiete geteilt und für jedes Gebiet eine Transformationsmatrix definiert. Unten ist die Gleichung für das Balkensystem

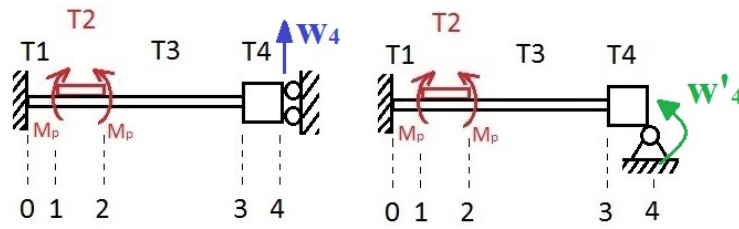


Abbildung 5.3: Balkensystem unter Piezoanregung

geschrieben. Diese Gleichung ist geeignet nur für die Piezoanregung. x_0 und x_7 sind für die Vektoren der Zustandsgrößen (Auslenkung, Neigung, Moment und Querkraft.)

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_4 = T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_0 + T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_p \\ 0 \end{Bmatrix} + T_4 \cdot T_3 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

Die Gleichung 5.1 gilt für die zwei Modelle in der Abbildung 5.3, wenn das System nur durch Piezoaktuatoren angeregt wird. Die Randbedingungen unterscheiden sich, weil die Masse zwei unterschiedliche Bewegungsmöglichkeit hat. Die Masse am linken Modell macht eine Hubbewegung. Deshalb sind die Randbedingungen $w'(L) = 0; Q(L) = 0$ für die Positionsnummer 4. Im Vergleich dazu macht die Masse am rechten Modell eine Drehbewegung. Dieses Mal sind die Randbedingungen $w(L) = 0; M(L) = 0$ für die Positionsnummer 4 [Gasch et al. 2012]. Die Länge zwischen Position 1 und 4 wird als L betrachtet.

Wenn die Masse eine Hubbewegung macht, wird der Zustandsvektor für Positionsnummer 4 wie unten.

$$x_4 = \begin{Bmatrix} w_4 \\ 0 \\ M_4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Für die Drehbewegung der Masse unter Piezoanregung ist der Zustandsvektor x_4 wie unten.

$$x_4 = \begin{Bmatrix} 0 \\ \varphi_4 \\ 0 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

Die Randbedingungen von der gespannten Seite ist für jede Anregungsart ist gleich. Aber Q und M Werte im Vektor (x_0) sind unterschiedlich für jede Anregung. Wie im vorherigen Kapitel werden als erstes diese Q und M Werte bestimmt werden, die abhängig von der Anregungsgröße sind. Erst danach können die unklare Parameter von Zustandsvektor x_4 berechnet werden.

Der Fall, in dem das Balkensystem unter Kraft angeregt wird, ist in der Abbildung 5.4 dargestellt. Nach den Randbedingungen macht die Masse zwei unterschiedliche Bewegungen.

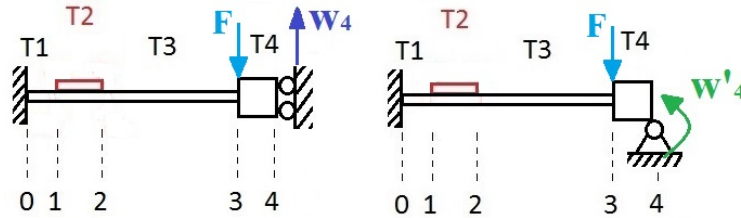


Abbildung 5.4: Balkensystem unter Kraftanregung

Die unten geschriebene Gleichung ist zur Lösung des Balkensystems unter Kraftanregung. Indem die unterschiedlichen Zustandsvektoren x_4 verwendet werden, können zwei Bewegungsarten analytisch gelöst werden.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_4 = T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_0 + T_4 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Die Abbildung 5.5 stellt das Balkensystem unter Fußpunktanregung dar. Auch wie die anderen Variationen sieht man in diesem Fall die Hub- und Drehbewegung.

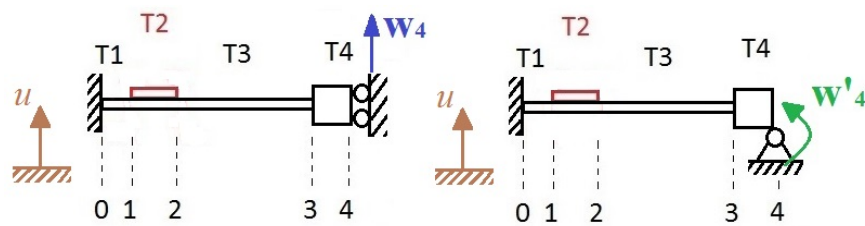


Abbildung 5.5: Balkensystem unter Fußpunktanregung

Für diese Art der Anregung wird die Gleichung unten gegeben. Der Fußpunktanregung u wird in der Gleichung für $w(0)$ verwendet.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_4 = T_4 \cdot T_3 \cdot T_2 \cdot T_1 \cdot \begin{Bmatrix} u \\ \varphi \\ M \\ Q \end{Bmatrix}_0$$

Wie in dem Kapitel Dynamischer Fall wird das Balkensystem im mehrdimensionalen Fall unter einzelne Anregungen untersucht. Damit man die gesamte Auswirkung der unterschiedlichen Anregungen sehen kann, wird es angenommen, dass das System sich linear verhält. Zur Bestimmung der gesamten Auslenkung an der Masse während gleichzeitige Anregungen alle drei gleichzeitig werden die einzelne Auslenkungen summiert.

6 Experimente

Bisher werden die Aufgaben analytisch untersucht. In diesem Kapitel wird beabsichtigt, die Anregungskraft mit Hilfe der Messergebnisse zu bestimmen.

6.1 Aufbau und Funktion des Versuchsstands

Die Experimente werden allgemein unter statischen und dynamischen Anregungen durchgeführt. Die Anregungsarten werden für ein- und dreidimensional bewegtes Balkensystem verwendet. In der Abbildung 6.1 wird der eindimensionaler Fall dargestellt. Die statischen und dynamischen Experimenten werden für dieses Balkensystem (Abbildung 6.1) durchgeführt. Im statischen Fall wird das Balkensystem von der Kraft und dem Piezoaktuator angeregt. Für den dynamischen Fall geht es um Kraft-, Piezo- und Fußpunktanregung.

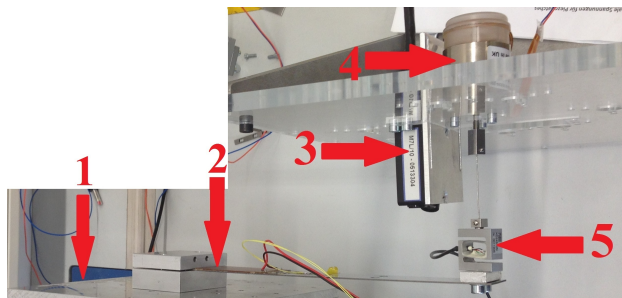


Abbildung 6.1: Der Versuchsstand für eindimensionalen Fall (1. Fußpunktanregung (Grundplatte), 2. Piezoanregung, 3. Lasersensor, 4. Kraftanreger, 5. Kraftsensor)

Die erste Anregung ist Fußpunktanregung, die auf festen Teil (die eingespannte Seite) des Balkens auswirkt. Die feste Seite des Balkens ist zwischen zwei Metallblöcke festgehalten. Danach werden diese Blöcke zu einer Grundplatte festgeschraubt. Diese Grundplatte bewegt sich mit dem Weg u . Durch den Weg u kann das System vertikal wie in der Abbildung 6.1 bewegt werden.

Die zweite Anregung ist die Piezoanregung. Für diese Anregungsart wird der Flächenaktuator auf dem Balken geklebt. Als Piezoaktuator wird P-876.A15 der Firma Pi-Ceramics benutzt.

Die dritte Anregungsart ist Kraftanregung. Ein Tauchspulen-Aktor sorgt für die Kraftanregung. Dieser Aktor wird durch eine Stütze befestigt. Auf diese Weise kann der Balken in der Mitte des Balkenendes angeregt werden. Zwischen dem Balkenendpunkt und dem Kraftanreger befindet sich der Kraftsensor. In der Abbildung 6.2 wird der Versuchsstand mit den anderen Elementen wie z.B. Sensoren, Verstärker dargestellt.

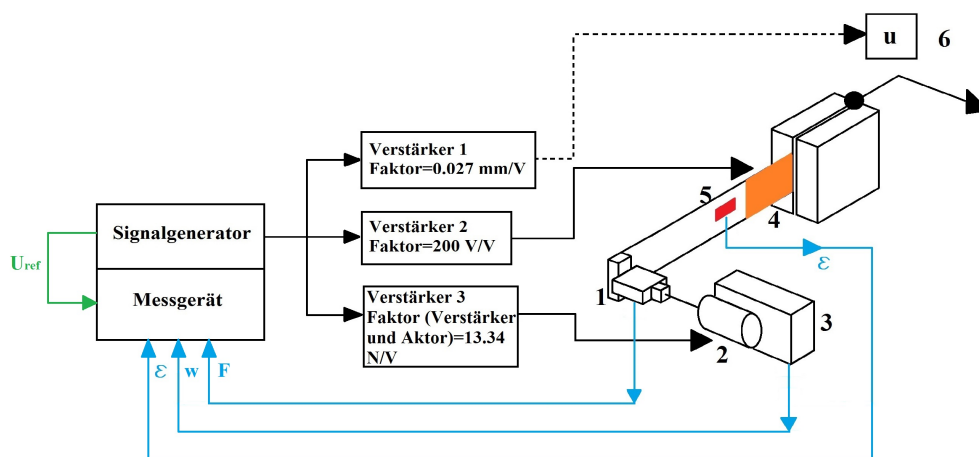


Abbildung 6.2: Darstellung der Teile des Versuchsstandes (1.Kraftsensor, 2.Kraftanregung, 3.Triangulationssensor, 4.Flächenaktuator (orange), 5.DMS (rot), 6.Fußpunktanregung)

Das jeweilige Anregungssignal wird durch Verstärker zum jeweiligen Anreger (Fußpunkt-, Kraftanreger und Piezoaktuator) weitergeleitet. Die durch Sensoren (Kraft-, Triangulatorsensor und DMS) gemessenen Werten werden zum Messgerät gesendet.

6.1.1 Eindimensionaler Bewegungsfall

In dem eindimensionalen Fall geht es um ein Balkensystem, das fest-frei ist. Das System wird unter der statischen und dynamischen Anregung untersucht.

6.1.1.1 Statischer Fall

Im statischen Fall wirkt Piezo- und Kraftanregung auf den Balken ein. Unter diesen Anregungen macht der Balken eindimensionale Bewegung. In der Abbildung 6.3 wird dargestellt, wie der Balken angeregt wird. Wegen der Anregung ist die Bewegung in z-Richtung. Die Experimente werden so durchgeführt, dass das Balkensystem unter

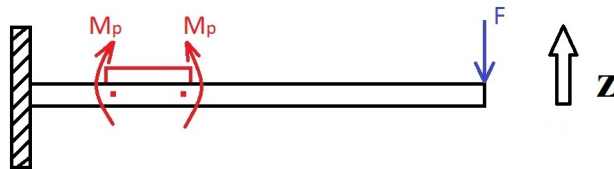


Abbildung 6.3: Die eindimensionale Balkenbewegung

einzelne Anregungen und die beiden Anregungen gleichzeitig angeregt wird.

6.1.1.2 Dynamischer Fall

In dem dynamischen Fall ist das Balkensystem unter Kraft-, Piezo- und Fußpunktanregung. In der Abbildung 6.4 wird das System gezeigt. Mit der Einwirkung

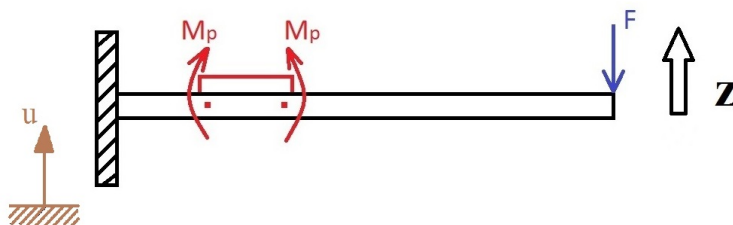


Abbildung 6.4: Die eindimensionale dynamische Balkenbewegung

der Anregungen (einzeln, als Kombination z.B. Kraft- und Fußpunktanregung oder alle drei gleichzeitig) bewegt sich der Balken in z-Richtung.

6.1.2 Dreidimensionaler Bewegungsfall

Im dreidimensionalen Fall beschäftigt man sich mit einem kreuzförmigen Balken. In der Mitte des Kreuzes gibt es ein kleines Metallblock mit Schraubenlöcher, damit kann man das Kreuz mit einer Platte verbinden. Diese Platte wird für die Kraftanregung verwendet. An den Rändern des Kreuzes verbindet man das Kreuz mit der Grundplatte, die sich mit dem Weg u bewegt. In der Abbildung 6.5 wird das Kreuz für den dreidimensionalen Fall gezeigt. Dieses Balkensystem wird von Kraft-, Piezo- und

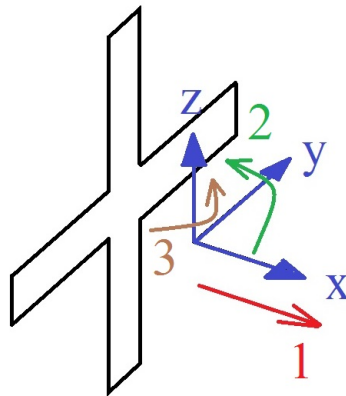


Abbildung 6.5: Der dreidimensionale Fall

Fußpunktanregung angeregt. Nach der Anregung kann das Kreuz drei unterschiedliche Bewegung machen wie z.B. in x-Richtung (erste Bewegungsart), um y-Achse (zweite Bewegungsart) und um z-Achse (dritte Bewegungsart).

6.2 Durchführung der Experimente

Die Experimente der Arbeit werden in zwei Schritten behandelt. Zuerst wird der eindimensionaler Fall (statische und dynamische Anregung) und danach dreidimensionaler Fall (nur dynamische Anregung) untersucht. Während der Experimenten wird ein Signal (Gleitsinus) als Anregung benutzt. Der Frequenzbereich der Anregung liegt zwischen 0-50 Hz. Die Dauer der jeden Messung ist 16 s. Der erste Kanal des Signalgenerators ist für Referenzspannung. Das Geräts dividiert das gemessene Wert durch Referenzspannung.

Außerdem ist es notwendig für die Messungen, Empfindlichkeit der Kraftmessung (Messverstärker und Kraftsensor) zu bestimmen. Für die Bestimmung dieser Daten wird

eine Referenzmasse benutzt, deren Gewicht 142.2 g ist. Mit Hilfe der Referenzmasse wird die Empfindlichkeit der Kraftmessung auf 0.6005 V/N kalibriert.

Die DMS, die in den Experimenten verwendet werden, ist mit einer Viertelbrücke angeschlossen. Die Empfindlichkeit der DMS-Messung (Messverstärker und DMS) wird durch den k-Faktor des DMS (2.04) und durch Kalibrieren der Messbrücke zu 1205 m/m/V bestimmt.

Das vom Signalgenerator erzeugte Signal wird durch Verstärker zum Anreger gesendet. Für jeden Anreger ergibt sich zusammen mit dem jeweiligen Verstärker ein Verstärkungsfaktor. In der Tabelle 6.1 werden die Verstärkungsfaktoren dargestellt.

	Verstärkungsfaktor
Kraftanregung [V_{Kraft}]	13.34 N/V
Piezoanregung [V_{Piezo}]	200 V/V
Fußpunktanregung [$V_{Fuß}$]	0.027 mm/V

Tabelle 6.1: Verstärkung der Anregung

6.2.1 Experimente des eindimensionalen Falls

Die Experimente des eindimensionalen Falls werden für statische und dynamische Anregungen gemacht.

6.2.1.1 Die statischen Experimente

In den statischen Analysen des Balkensystems wird der Balken von der Kraft- und dem Piezoaktuator angeregt. Als erstes werden die Einstellungen der Anregung so gemacht, dass der erzeugte Weg ca. gleich ist. Das Ziel dafür ist es, dass die entstehende Auslenkung wegen der Kraft und des Piezoaktuators im Arbeitsbereich des Lasersensors bleibt. In der Tabelle 6.2 sind die Änderung der Auslenkung, der Dehnung und der Kraft unter Anregung gegeben. Während der Messung ist die Phase der Kraftanregung (Bezogen auf das Referenzsignal) 0°.

Indem man die Anregungsspannung so einstellt, wird beabsichtigt, dass der erzeugte Weg ähnlich sein kann. Im nächsten Schritt der statischen Messungen ist die Phase der

	ΔW_{eg} [mm]	$\Delta \epsilon$ [m/m]	ΔF [N]
Piezoanregung	0.41	-4.368	-0.0102
Kraftanregung(0°)	0.38	25.379	0.178
Piezo+Kraft(0°)	0.103	-28.777	-0.173

Tabelle 6.2: Daten der statischen Messungen

Kraft 180° . Mit dieser Einstellung werden die Messungen wiederholt. In der Tabelle 6.3 sind die Ergebnisse dieser Messung wird gezeigt. Am freien Ende des Balkens befinden

	$\Delta \epsilon$ [m/m]	ΔF [N]
Piezoanregung	-4.368	-0.0102
Kraftanregung(180°)	-20.828	-0.153
Piezo+Kraft(180°)	16.866	-0.159

Tabelle 6.3: Daten der statischen Messungen (180°)

sich der Kraftsensor und der Kraftanreger. Von der Änderungen in der Spannung kann man ausgehen, dass die Kraftanregung sowohl mit dem Kraftsensor als auch mit den DMS zu bestimmen ist.

6.2.1.2 Die dynamischen Experimente

Bei den dynamischen Experimente des eindimensionalen Balkensystems sind die Anregungen Kraft, Piezoaktor und Fußpunkt. Bei den Messungen soll als erstes die Empfindlichkeit der Kraftmessung (0.6005 V/N), danach die Verstärkungsfaktoren (aus Tabelle 6.1) für die Anregungen eingestellt werden.

6.2.2 Experimente des dreidimensionalen Falls

Für den dreidimensionalen Fall wird das Kreuz so positioniert, dass das Gewicht keine Auslenkung wegen der Gravitation verursacht. Da im Balkensystem vier Stücke (ein Stück auf jeder Seite) Piezoaktuator, DMS und Kraftanreger gibt, wird jede Seite nummeriert. In der Abbildung 6.6 wird die Nummer gesehen.

Dank der Nummerierung wird es einfacher, die Messungen zu dokumentieren. Vor dem Aufbau des Kreuzes zum Prüfstand wird eine Metallplatte zur Masse festgeschraubt. Diese Platte ist nötig, damit man die Kraftanreger montieren kann. Die anregende Kraft wird zum Kreuz durch dieses Metallteil übermittelt. Wegen des

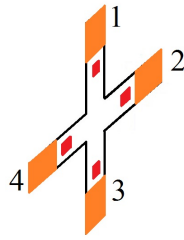


Abbildung 6.6: Die Nummer der DMS (Flächenaktoren in orange, DMS in rot dargestellt).

Gewichts der Platte entsteht eine Beugung am Balken. Um diese Problem zu verhindern, muss ein Gegengewicht auf die andere Seite montiert werden. In der Abbildung 6.7 wird der Versuchstand für dreidimensionale Bewegung dargestellt. Im Versuchstand sieht man die Platte und ihr Gegengewicht.

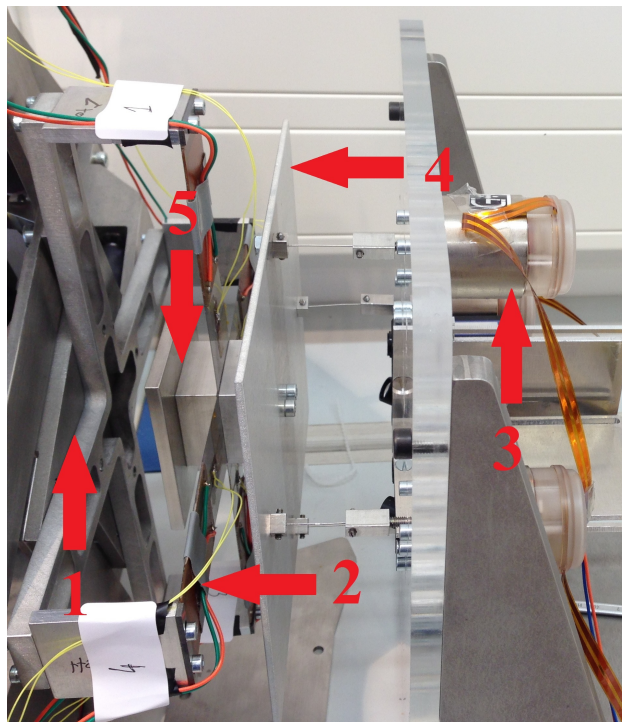


Abbildung 6.7: Versuchstand für dreidimensionale Bewegung (1. Grundplatte, 2. Piezoaktor, 3. Kraftanreger, 4. Platte, 5. Gegengewicht)

Nach der Vorbereitung des Versuchszustandes werden die Einstellungen für Lasersensor und DMS eingerichtet. Für diese Experimente werden zwei unterschiedliche Lasersensoren verwendet. Auf einer Seite messen Lasersensoren (Sensitivität=0.5 mm/V) die Bewegung der Platte (mit der Mitte des Kreuzes verbunden)

und auf der anderen Seite messen Lasersensoren (Sensitivität=0.1 mm/V) die Bewegung der Grundplatte (bewegt durch Fußpunktanregung). Diese Lasersensoren, die die Bewegung der Platte messen, sind an der gleichen Aufnahme wie die Kraftanreger befestigt. Durch diese zwei Sensoren können Auslenkung und zwei Drehbewegungen gemessen werden. Auf der anderen Seite gibt es drei Lasersensoren. So kann jede Bewegungsart einzeln gemessen werden.

Für diese Experimente werden die gleichen Empfindlichkeitswerten genauso wie die Werten im eindimensionalen Fall benutzt. Von dem Signalgenerator erzeugter Signal wird durch Verstärker für jeden Anreger zum Piezoaktuator, Kraft-, Fußpunktanreger gesendet. Es wird geprüft, ob alle Anreger etwa gleiche Amplitude erzeugen.

6.3 Auswertung der Messergebnisse

Das Hauptziel der Arbeit ist es, durch gemessene Dehnung am Balken die Größe der Anregungskraft zu bestimmen. Um diese Größe zu bestimmen, werden die DMS-Messungen ausgewertet.

6.3.1 Lösungsprinzip der Auswertung

Die durch Einwirkung von Einzelanregungen erzeugten Dehnungen können bei vorausgesetztem linearen Systemverhalten zu einer Gesamtdehnung zusammengefasst werden (Gleichung 6.1). In den Formeln werden die Anregungen Kraft, Piezoaktor und Fußpunkt mit Anfangsbuchstaben gezeigt, wie z.B. K für Kraft, P für Piezoaktor und F für Fußpunkt.

$$\varepsilon(K, P, F) = \varepsilon(K) + \varepsilon(P) + \varepsilon(F) \quad (6.1)$$

Alle gemessenen Werte sind auf eine Referenzspannung ($U_{Ref}=3$ V) bezogen. In der Gleichung 6.2 wird die Dehnung unter alle drei Anregungen durch das gemessene Wert $\varepsilon(K,P,F)/U_{Ref}$ berechnet.

$$\varepsilon(K, P, F) = \frac{\varepsilon(K, P, F)}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref} \quad (6.2)$$

Die Berechnung der Dehnung unter einzelne Anregung ist wie unten formuliert. Das berechnete Dehnungswert wird durch das gemessene Wert erhalten.

$$\varepsilon(K) = \frac{\varepsilon(K)}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref}; \varepsilon(P) = \frac{\varepsilon(P)}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref}; \varepsilon(F) = \frac{\varepsilon(F)}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref}$$

Nach der Nummer des Teils am Kreuz wird die Dehnung unter einzelne Anregung, Kombination der Anregung (z.B. Kraft- und Piezoanregung) oder alle drei Anregungen gleichzeitig durchgeführt.

Der nächste Schritt bei Umformulierung ist es, dass die Eingangsgrößen einbezogen werden. Die Gleichung 6.3 kann mit den Anregungsgrößen aus der Formel 6.1 so ausgedrückt werden.

$$\varepsilon(K, P, F) = \frac{\varepsilon(K)}{F_k} \cdot F_k + \frac{\varepsilon(P)}{U_{Piezo}} \cdot U_{Piezo} + \frac{\varepsilon(F)}{u_{Fu\beta}} \cdot u_{Fu\beta} \quad (6.3)$$

Die berechnete Anregung für die Kraft (F_K), für den Piezoaktuator (U_{Piezo}) und für den Fußpunktanregung ($u_{Fu\beta}$) ist wie unten formuliert. Unten sind die Größe der Anregungen gegeben. Die Verstärkungsfaktoren sind aus der Tabelle 6.1 genommen.

$$F_K = V_{Kraft} \cdot \frac{U_{Kraft1}}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref}$$

$$U_{Piezo} = V_{Piezo} \cdot \frac{U_{Piezo1}}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref}$$

$$u_{Fu\beta} = \frac{u_{Fu\beta}}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref}$$

In der Formel 6.3 wird angenommen, dass die gesamte Dehnung die Summe der entstehenden Dehnung unter einzelne Anregungen gilt. Zur Bestimmung der Kraftgröße wird aus der Gleichung 6.3 zu F_K (Formel 6.4) umgestellt.

$$F_K = \frac{\varepsilon(K, P, F) - \frac{\varepsilon(P)}{U_{Piezo}} \cdot U_{Piezo} - \frac{\varepsilon(F)}{u_{Fu\beta}} \cdot u_{Fu\beta}}{\frac{\varepsilon(K)}{F_k}} \quad (6.4)$$

Mit der Gleichung 6.4 lässt sich die anregende Kraft bestimmen. Die gleiche Methode wird für jeden Teil angewendet, damit die anderen drei Anregungsgrößen bestimmt werden können.

Für die Fälle, wenn der Balken unter Kraft und Fußpunkt oder Kraft und Piezoaktuator angeregt wird, muss die Formulierung umgeschrieben werden. Wenn das Balkensystem unter Kraft- und Fußpunktanregung ist, ist die Summe der durch einzelne Anregung entstehenden Dehnungen wie unten.

$$\varepsilon(K, F) = \frac{\varepsilon(K)}{F_k} \cdot F_k + \frac{\varepsilon(F)}{u_{Fu\beta}} \cdot u_{Fu\beta} \quad (6.5)$$

Es wird angenommen, dass die Summe der Dehnung unter Kraft- und Fußpunktanregung gleich zur Dehnung unter Kraft- und Fußpunktanregung gleichzeitig gilt. Aus der Gleichung 6.5 wird F_k ausgezogen.

$$F_k = \frac{\varepsilon(K, F) - \frac{\varepsilon(F)}{u_{Fu\beta}} \cdot u_{Fu\beta}}{\frac{\varepsilon(K)}{F_k}} \quad (6.6)$$

Die andere Anregungskombination ist der Fall von Kraft- und Piezoanregung. Es wird auch hier angenommen, dass die Dehnung unter beide Anregung gleichzeitig gleich der Summe der einzelnen Dehnungen ist.

$$\varepsilon(K, P) = \frac{\varepsilon(K)}{F_k \cdot l} \cdot F_k \cdot l + \frac{\varepsilon(P)}{U_{Piezo}} \cdot U_{Piezo} \quad (6.7)$$

Aus der Gleichung 6.7 wird die Kraftanregung (F_K) ausgezogen. Die neue Form der Gleichung sieht wie unten aus.

$$F_K = \frac{\varepsilon(K, P) - \frac{\varepsilon(P)}{U_{Piezo}} \cdot U_{Piezo}}{\frac{\varepsilon(K)}{F_K}} \quad (6.8)$$

Mit Hilfe der oben genannten Gleichungen wird es möglich, dass man die anregenden Kräfte bei unterschiedlichen Anregungsfälle bestimmen kann.

6.3.2 Eindimensionaler Fall

Eindimensionaler Fall wird mit den Anregungen in der Abbildung 6.8 dargestellt. Während der Experimente wird die Dehnung unter einzelne Anregung, Kombination der Anregungen (z.B. Kraft- und Piezoanregung) und als letztes unter alle drei Anregungen gleichzeitig gemessen.

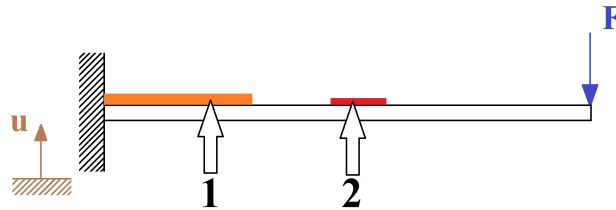


Abbildung 6.8: Modell für den eindimensionalen Fall (1. Piezoaktuator, 2. DMS)

In der Abbildung 6.9 wird die genaue Position des DMS dargestellt. Für die gegebenen Längen wird der Mittelpunkt des Streifens als Referenz gehalten.

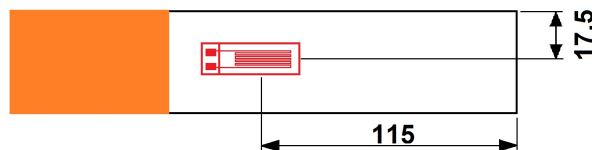


Abbildung 6.9: Position des DMS im eindimensionalen Fall (Flächenaktor in orange, DMS in rot dargestellt).

Die Messdaten von DMS unter einzelne Anregung und alle drei gleichzeitig werden in der Abbildung 6.10 gezeigt. Aus der Abbildung 6.10 wird gelesen, dass $\epsilon(F)=0.095$, $\epsilon(K)=0.0109$, $\epsilon(P)=0.0099$ sind. Die in der Abbildung dargestellten Werte sind auf Referenzspannung bezogen. Die Summe dieser einzelnen Dehnungen ist größer als die Dehnung unter alle drei Anregungen.

Danach werden die gemessenen Werte werden wie im Kapitel 6.3.1 erklärten Lösungsprinzip ausgewertet. In der Abbildung 6.11 wird die gemessene Dehnung (blaue Linie) mit der Summe (rote Linie) der unter einzelne Anregung entstehenden Dehnungen verglichen. Es ist auffällig, dass die Dehnungswerte in der Abbildung 6.11 an der ersten

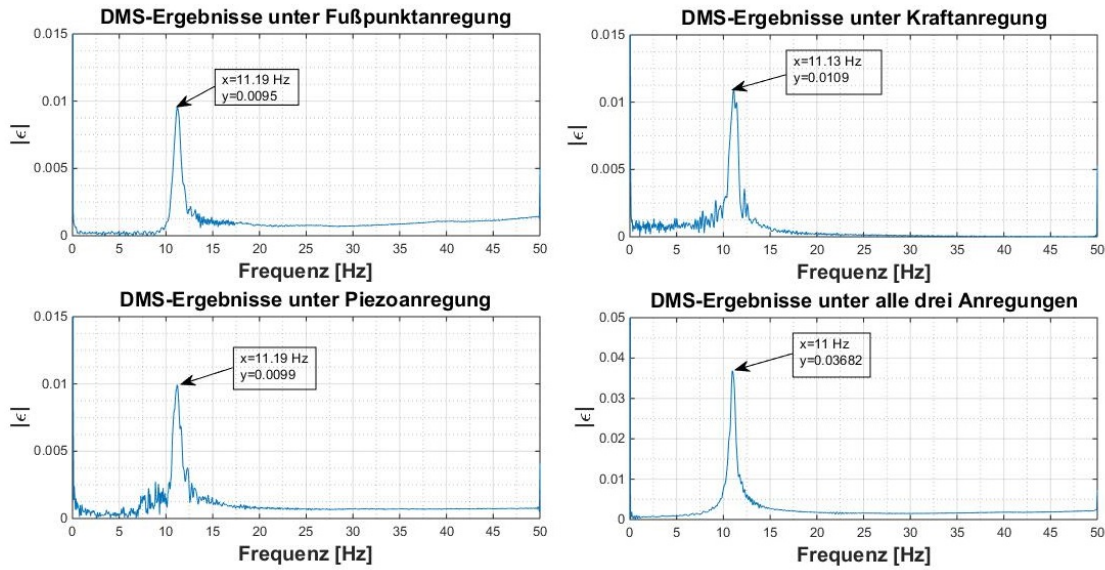


Abbildung 6.10: Dehnungsergebnisse des eindimensionalen Falls

Eigenfrequenz ($\omega_1=11 \text{ Hz}$) nicht übereinstimmen. Auf der anderen Seite gibt es eine deutliche Einigkeit von 0 bis 50 Hz außer der Eigenfrequenz.

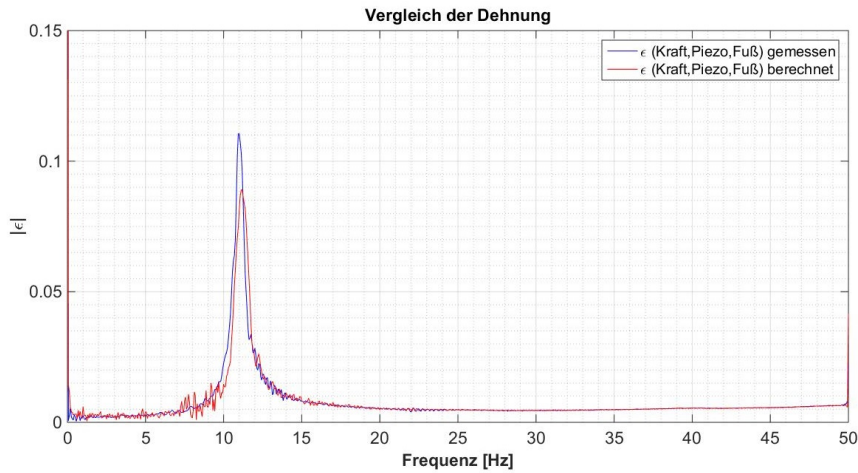


Abbildung 6.11: Vergleich der Dehnungsergebnisse des eindimensionalen Falls

Der nächste Schritt im eindimensionalen Fall ist die Bestimmung der Anregungskraft durch DMS, während andere Anregungen aktiv sind. Die Anregungskraft wird für drei Fälle ($\epsilon(K, P, F)$, $\epsilon(K, P)$, $\epsilon(K, F)$) untersucht und mit der berechneten Kraftgröße ($F_K = V_{Kraft} \cdot \frac{U_{Kraft1}}{U_{Ref}} \cdot U_{Ref}$) verglichen.

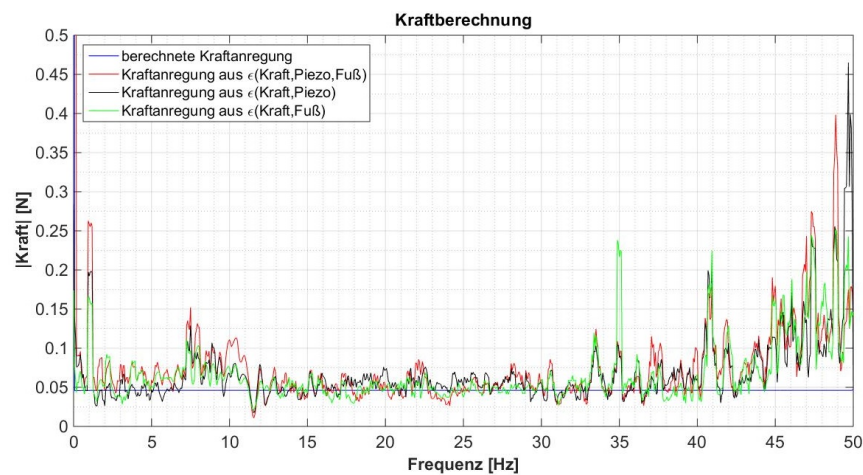


Abbildung 6.12: Vergleich der Dehnungsergebnisse des eindimensionalen Falls unter Kombinationen von Kraftanregung

Die Kraft für unterschiedliche Kombinationen wird nach Formel 6.4, 6.6, 6.8 berechnet. In der Abbildung 6.12 sind die Ergebnisse dargestellt. Die Ergebnisse zeigen Ähnlichkeit mit dem Kraftwert (mit blau dargestellt) zum großen Teil, das für Referenz gehalten wird.

6.3.3 Dreidimensionaler Fall

In dem dreidimensionalen Fall handelt es sich um ein Balkensystem, das kreuzförmig ist. Auf der jeden Ecke des Kreuzes wird ein DMS geklebt, damit man die entstehende Dehnung messen kann. Die Position des DMS für dreidimensionalen Fall wird in der Abbildung 6.13 gezeigt.

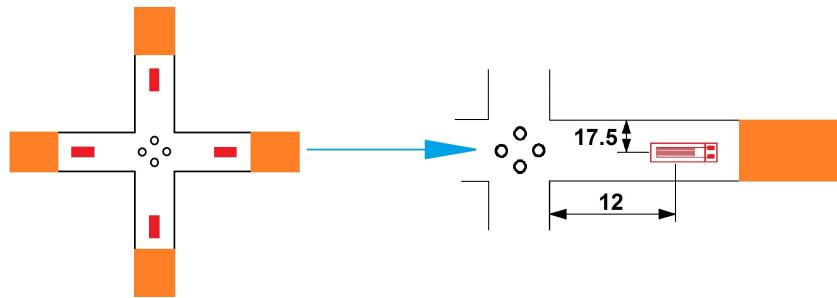


Abbildung 6.13: Position des DMS im dreidimensionalen Fall

Da dreidimensionales System kompliziert zu berechnen ist, muss die Berechnung für ein Viertelmodell des Systems gemacht werden. In der Abbildung 6.14 wird dieses Viertelmodell dargestellt. In der Darstellung wird der Piezoaktuator mit oranger Farbe und der DMS mit roter Farbe gezeichnet. Es wird angenommen, dass die Masse von der Mitte zwei symmetrische Teile getrennt. Auf diese Weise wird die Auswirkung der Anregungen auf jeden Teil des Kreuzes einfacher untersucht.

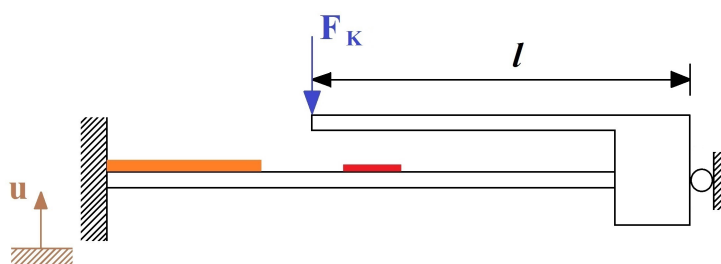


Abbildung 6.14: Viertelmodell des dreidimensionalen Balkensystems

In diesem Fall wirkt die Kraft auf das Balken nicht direkt ein. Durch die Platte wird die Kraft geleitet. Aus diesem Grund wird sich in der Formulierung mit Moment beschäftigt.

$$M_1 = F_K \cdot l$$

Da es um eine Momentwirkung geht, wird die Gleichung 6.3 umformuliert. Die Formel für den dreidimensionalen Fall nach Momentwirkung ist unten geschrieben.

$$\varepsilon(K, P, M_1) = \frac{\varepsilon(K)}{M_1} \cdot M_1 + \frac{\varepsilon(P)}{U_{Piezo}} \cdot U_{Piezo} + \frac{\varepsilon(F)}{u_{Fu\beta}} \cdot u_{Fu\beta} \quad (6.9)$$

Die Experimente wurden nach der Bewegungsart (vgl. Abbildung 6.15, 6.18, 6.21) durchgeführt. Es handelt sich um drei unterschiedliche Bewegungsmöglichkeit für das Balkensystem. In dem ersten Anregungsfall macht die Masse (Zentrum des Kreuzes) hin und her Bewegung. Durch diese Bewegung können die alle vier DMS die entstehende Dehnung gemessen werden. In der Abbildung 6.15 werden die Dehnungsergebnisse unter drei einzelne Anregung (Fußpunkt-, Kraft- und Piezoanregung) und alle gleichzeitig dargestellt. Auf der x-Achse steht das Anregungsfrequenzwert und auf der y-Achse steht die Dehnung.

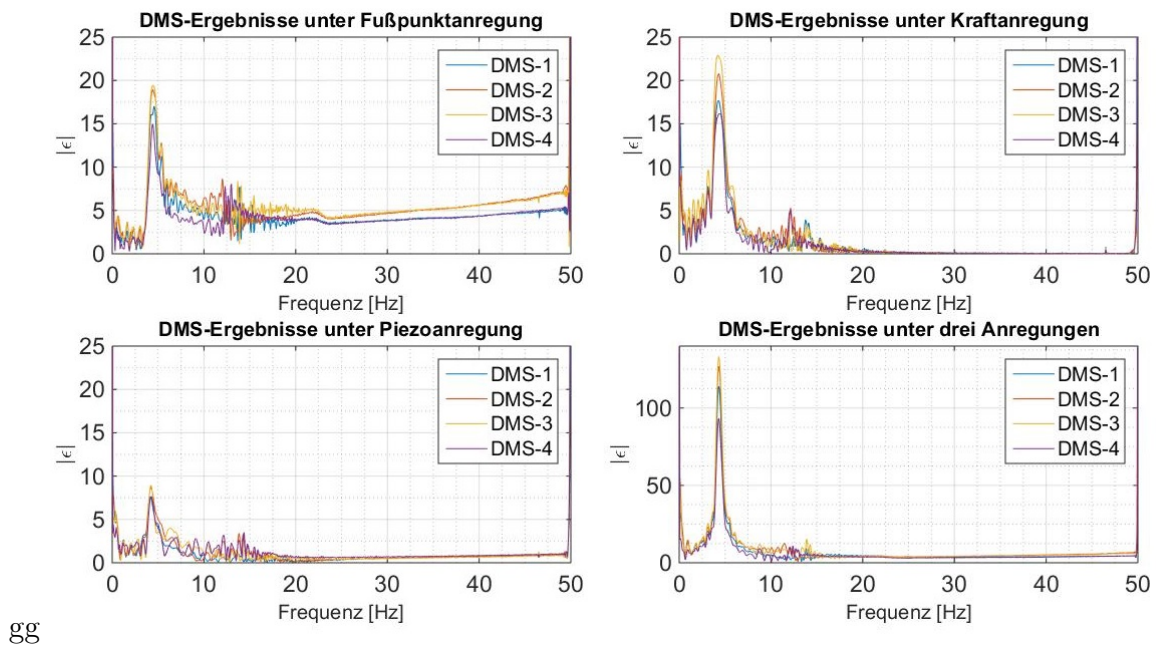


Abbildung 6.15: DMS-Ergebnisse für die erste Bewegungsrichtung

Danach werden die gemessene Dehnung (wenn alle drei Anregungen aktiv sind) und die berechnete Dehnung (Gleichung 6.1) verglichen. Das Ergebnis dieses Vergleichs wird in der Abbildung 6.16 gezeigt. Die blaue Linie zeigt das gemessene Dehnungswert. Mit der braunen Linie wird nach der oben genannten Gleichung die Summe der Dehnungen der Einzelanregungen (ausschließlich Kraftanregung, ausschließlich

Fußpunktanregung, ausschließlich Piezoanregung) dargestellt. Nach dem Vergleich der Dehnungen ist der nächste Schritt zu prüfen, ob mit DMS-Ergebnissen die Anregungsmoment (durch F_k) bestimmt werden kann. Die berechneten Ergebnisse sind

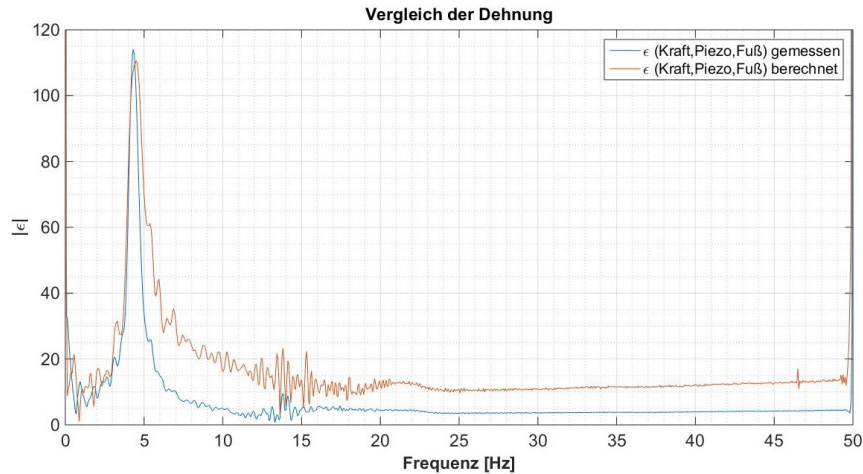


Abbildung 6.16: Vergleich der DMS-Ergebnisse für die erste Bewegungsrichtung für Teil 1

in der Abbildung 6.17 dargestellt. In der Darstellung sind die blaue Linie für die berechnete Kraft ($F_K = V_{Kraft} \cdot (U_{Kraft1}/U_{Ref}) \cdot U_{Ref}$), die braune Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, P, F)$, die gelbe Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, P)$ und die lila Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, F)$ gegeben. In der Abbildung wird die Kraftgröße (y-Achse) nach Anregungsfrequenz (x-Achse) untersucht. In der ersten Bewegungsart ist es zum großen

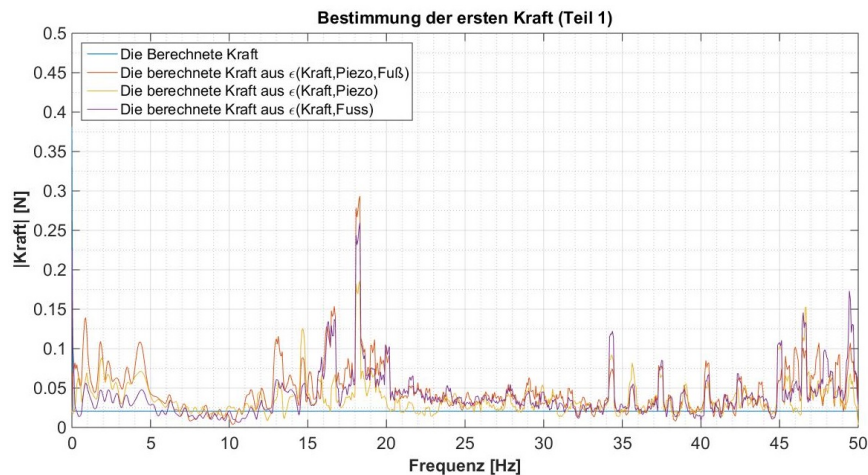


Abbildung 6.17: Vergleich der Kraft aus der DMS-Ergebnisse unter Kombination von Kraftanregung in der erste Bewegungsrichtung für Teil 1

Teil möglich, die anregende Kraft durch DMS Messungen zu bestimmen. Das Bild 6.17

zeigt, dass die aus der Dehnung berechneten Kräfte Ähnlichkeit mit der Kraft (mit blau dargestellt) haben. Die zweite Bewegungsart ist die Drehbewegung um y-Achse (Abbildung 6.5). In diesem Fall sind erste und dritte Kraft-, Piezo- und Fußpunktanreger aktiv. Obwohl Verstärker für die zweiten und vierten Anreger eingeschaltet wurden, wird kein Signal zu ihnen gesendet. Damit die genannte Drehbewegung ermöglicht wird, müssen erste und dritte Anreger in unterschiedlichen Phasen auf den Balken einwirken (Anregung für den Anreger-1 0° , Anregung für den Anreger-3 180°).

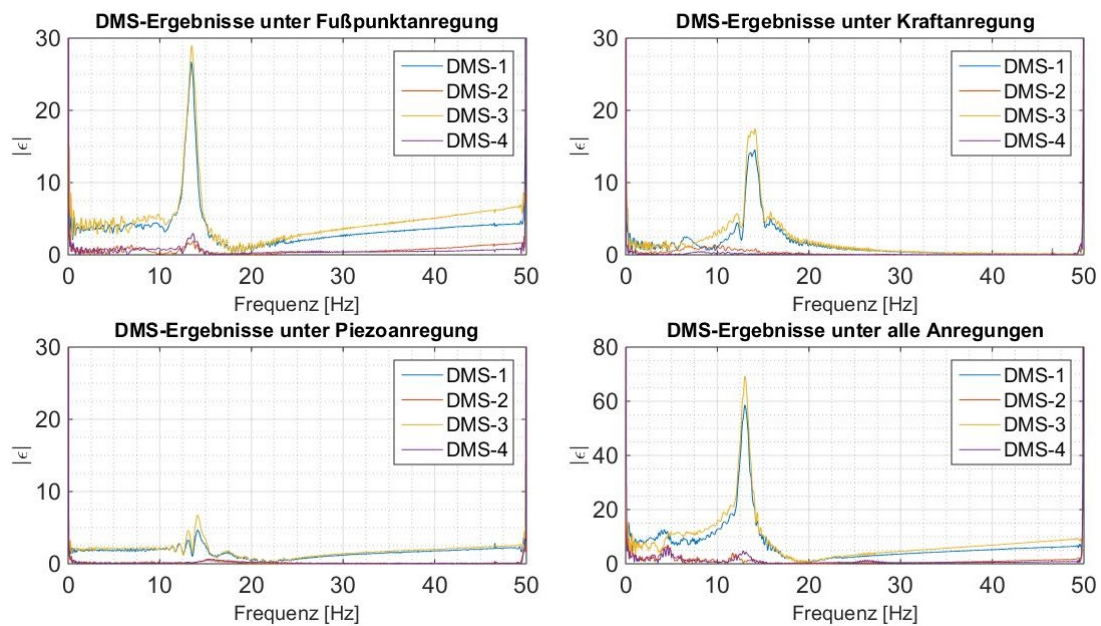


Abbildung 6.18: DMS-Ergebnisse für die zweite Bewegungsrichtung

In der Abbildung 6.18 werden die Dehnungsergebnisse bei Drehbewegung um die y-Achse unter einzelne Anregungen und unter alle drei gleichzeitig dargestellt. Es ist deutlich, dass der Dehnungssignal in DMS-1 und DMS-3 wesentlich größer als den Signal in DMS-2 und DMS-4 ist. Der Hauptgrund dafür ist, dass nur zwei (DMS Nr.1 und DMS Nr.3) der vier DMS Dehnungen erfahren und die zwei anderen DMS (DMS Nr.2 und DMS Nr.4) nur tordiert werden und daher kein Signal liefern. Diese Belastungsrichtung kann daher mit dem gewählten DMS Aufbau bestimmt werden.

Als nächstes wird die gemessene Dehnung mit der berechneten Dehnung (wie vorher) verglichen. Die Messung wird mit DMS-1 durchgeführt. Während der Messung waren alle Anregungen aktiv. Die Abbildung 6.19 zeigt das Ergebnis des Vergleichs. In der

Darstellung ist das gemessene Wert mit blau und das berechnete Wert mit braun gegeben. Danach soll die anregende Kraft (Nummer 1) bestimmt werden. Hier wird es

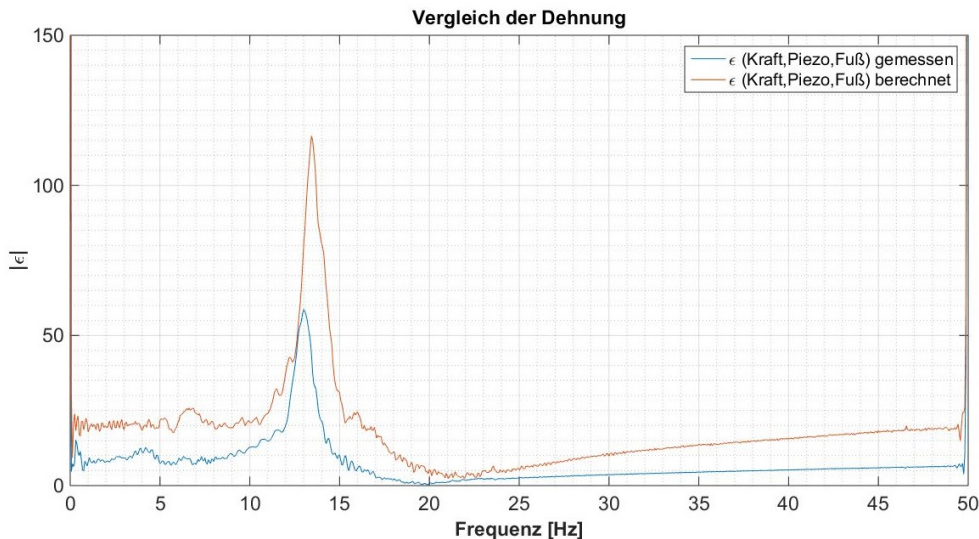


Abbildung 6.19: Vergleich der DMS-Ergebnisse für die zweite Bewegungsrichtung für Teil 1

geprüft, ob die Kraftberechnungen übereinstimmen. Die Ergebnissen sind in der Abbildung 6.20 gezeigt. In der Darstellung sind die blaue Linie für die berechnete Kraft ($F_K = V_{Kraft} \cdot (U_{Kraft1}/U_{Ref}) \cdot U_{Ref}$), die braune Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, P, F)$, die gelbe Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, P)$ und die lila Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, F)$ gegeben. In der Abbildung wird die Kraftgröße (y-Achse) nach Anregungsfrequenz (x-Achse) untersucht. Die Darstellung 6.20 zeigt unterschiedliche Kraftergebnisse bis die erste

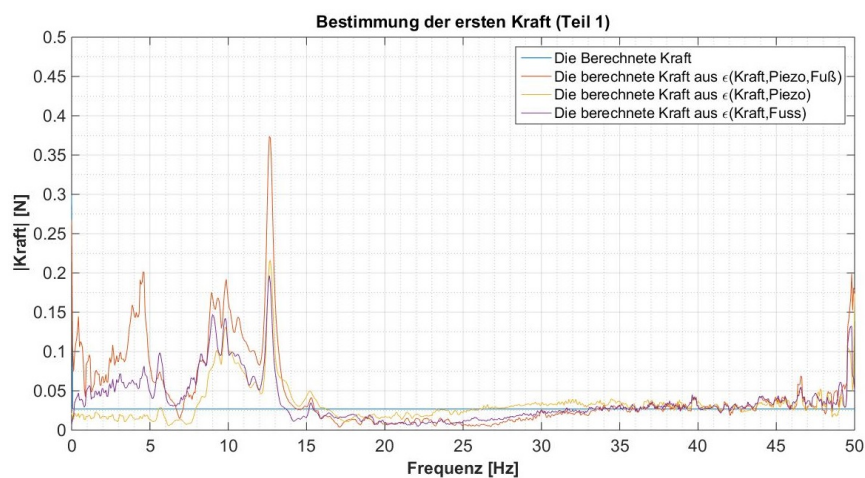


Abbildung 6.20: Vergleich der Kraft aus der DMS-Ergebnisse unter Kombination von Kraftanregung in der zweite Bewegungsrichtung für Teil 1

Eigenfrequenz. Ab der ersten Eigenfrequenz sind die Ergebnisse ähnlich.

Die letzte Bewegungsart ist eine Drehbewegung, die um z-Achse entsteht (Abbildung 6.5). Für die dritte Drehbewegung müssen zweite und vierte Anreger ansteuern. Die Verstärker der anderen zwei Anreger sind eingeschaltet bekommen aber keine Signale. In der Abbildung 6.21 sind die Ergebnisse der Dehnung unter einzelne Anregungen und

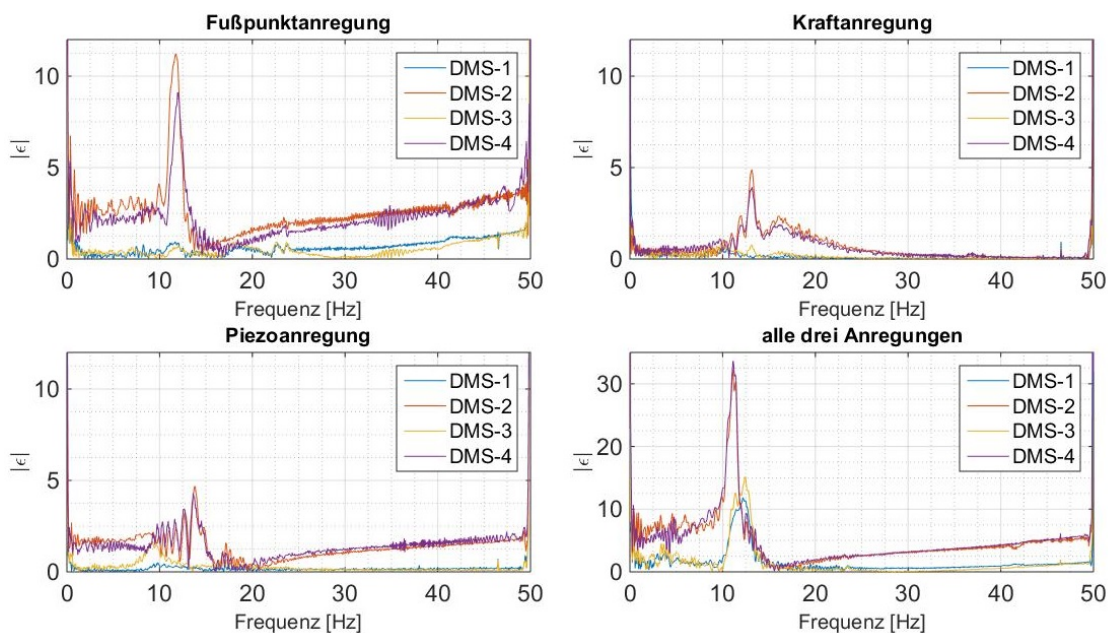


Abbildung 6.21: DMS-Ergebnisse für die dritte Bewegungsrichtung

unter alle drei Anregungen dargestellt. Da in diesem Fall der zweite und vierte Teil aktiv sind, bekommen DMS-2 und DMS-4 Signal. Wegen der Anregungsart entsteht eine Torsion dieses Mal bei Teil-1 und Teil-3.

Zuerst werden die Dehnungswerte für die dritte Bewegungsrichtung verglichen. Die Abbildung 6.22 stellt den Vergleich dar. Die blaue Linie zeigt das gemessene Dehnungswert. Mit der braunen Linie wird das mit der oben genannten Gleichung berechnete Dehnungswert gezeichnet. Die gemessenen und berechneten Werte in der Darstellung gelten für Teil 2. Danach wird die anregende Kraft für Teil 2 bestimmt. Das Lösungsprinzip ist gleich wie die Lösung für den Fall zweite Bewegungsrichtung. In der Abbildung 6.23 wird die berechneten Kraftgrößen dargestellt.

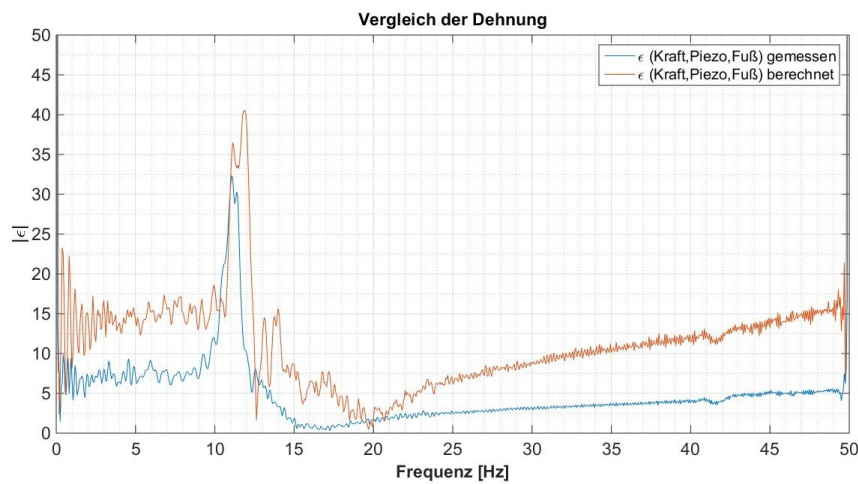


Abbildung 6.22: Vergleich der DMS-Ergebnisse in der dritte Bewegungsrichtung für Teil 2

In der Darstellung sind die blaue Linie für die berechnete Kraft ($F_K = V_{Kraft} \cdot (U_{Kraft1}/U_{Ref}) \cdot U_{Ref}$), die braune Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, P, F)$, die gelbe Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, P)$ und die lila Linie für die Kraft bei $\varepsilon(K, F)$ gegeben. In der Abbildung wird die Kraftgröße (y-Achse) nach Anregungsfrequenz (x-Achse) untersucht.

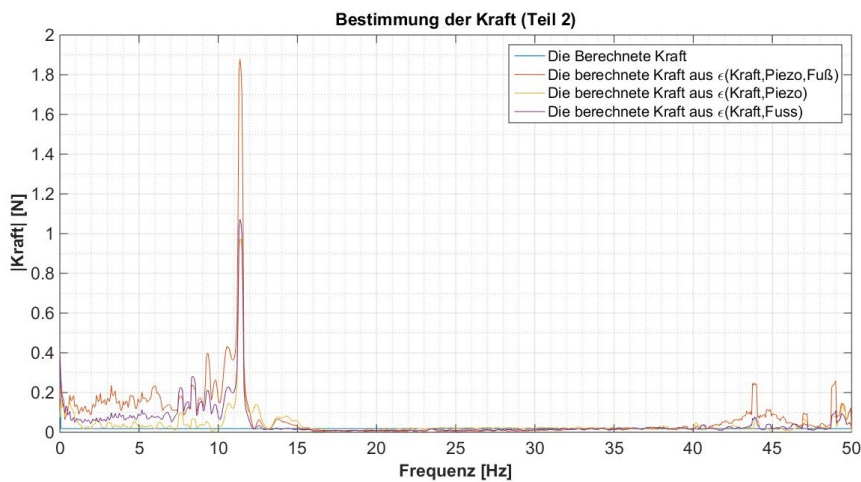


Abbildung 6.23: Vergleich der Kraft aus der DMS-Ergebnisse unter Kombination von Kraftanregung in der dritte Bewegungsrichtung für Teil 2

Die Abbildung 6.23 zeigt den Vergleich zwischen der berechneten Kraft (mit blau dargestellt) und der durch DMS Ergebnisse berechneten Kräfte. Bei der dritten Bewegungsart sind die Ergebnisse bis zur ersten Eigenfrequenz unterschiedlich. Erst ab

der ersten Eigenfrequenz sind die aus DMS berechneten Ergebnisse in der Nähe von der berechneten Kraft.

7 Fazit

In dieser Arbeit werden ein- und dreidimensionales Balkensystem unter Kraft-, Piezo- und Fußpunktanregung untersucht. Das Ziel der Untersuchungen ist es, die auf den Balken anregende Kraft mit Hilffeg von DMS zu bestimmen.

Der erste Schritt der ganzen Arbeit ist, das System durch mathematische Modelle (Euler-Bernoulli und Übertragungsmatrizenverfahren) zu analysieren. Die analytische Untersuchung wird für eindimensionalen Fall unter statischer und dynamischer Anregung durchgeführt. Die Ergebnisse der statischen Analyse werden mit den Ergebnissen der Studienarbeit [Tamer 2013] verglichen. Die theoretischen und experimentellen Ergebnisse sind vergleichbar.

Mit dem mathematischen Modell wird es festgestellt, dass der Piezoaktuator eine Momentwirkung hat, wo er positioniert ist. Im Gebiet zwischen dem Ende des Piezoaktuator und dem Balkenende wird aufgrund der Ansteuerung des Piezoaktors kein Moment eingeleitet. Auf der anderen Seite entsteht Moment auf dem ganzen Balken, während die Kraft auf den Endpunkt des Balkens einwirkt. Da Moment und Dehnung mathematisch im Zusammenhang sind, wird sich daran entschieden, dass DMS zwischen dem Ende des Piezoaktuator und dem Balkenende geklebt werden muss.

Das dreidimensionale Balkensystem wird nur experimentell untersucht. Das liegt daran, dass die Lösung dieses Systems nur mit großem Aufwand möglich ist. Allerdings wird ein Lösungshinweis für den dreidimensionalen Balken erklärt.

Danach werden diese zwei Balkensysteme experimentell untersucht. Zuerst werden die Experimente für den eindimensionalen Balken durchgeführt. In diesem Fall wird das Balken statisch und dynamisch angeregt. Bei der statischen Anregung werden

Piezoaktuator und Kraftanreger verwendet. Bei der dynamischen Anregung ist der Balken unter Kraft-, Piezo- und Fußpunktanregung. Die Dehnung wird unter einzelne Anregung, Kombination der Anregungen (z.B. Kraft- und Piezoanregung gleichzeitig) und alle drei gleichzeitig gemessen. Es wird angenommen, dass die Dehnung unter alle drei gleichzeitig gleich die Summe der Dehnung unter einzelne Anregungen ist. Mit Hilfe der DMS Ergebnisse wird die anregende Kraft bestimmt. Die gefundenen Kraftergebnisse haben Ähnlichkeit mit dem wahren Kraftwert zum großen Teil.

Als nächstes wird das dreidimensionale Balkensystem experimentell untersucht. Der dreidimensionale Balken ist kreuzförmig. In der Mitte des Kreuzes gibt es eine Masse. Jeder Teil des Kreuzes wird nummeriert. Die Anreger oder DMS am Balken sind mit dieser Nummer bezeichnet. Da das System drei unterschiedliche Bewegungsmöglichkeiten hat, werden die Experimente in drei Teilen verwirklicht. Vor dem Anfang der Messungen wird geprüft, ob die Phasen der Anreger stimmt ist. Das ist notwendig, weil alle drei Anreger das System z.B. für die erste Bewegungsrichtung in gleiche Richtung bewegen müssen. Die erste Bewegung ist hin und her Bewegung der Masse. Die zweiten und dritten Bewegungen sind Drehbewegungen der Masse.

Die Dehnungen für dreidimensionalen Fall in der ersten Bewegungsrichtung gemessen. Da DMS in ihrer aktiven Richtung gedehnt sind, hat jeder DMS eine Dehnung gemessen. Mit Hilfe der Dehnungsergebnissen kann die anregende Kraft zum großen Teil bestimmt werden.

Danach wird das Balkensystem für die zweite Bewegungsrichtung angeregt. In diesem Fall sind die Anreger Nr. 1 und Nr. 3 aktiv. Für die Drehbewegung hat der Anreger Nr. 1 0° und der Anreger Nr. 3 180° Phase. Aus diesem Grund haben nur DMS Nr. 1 und Nr. 3 die entstehende Dehnung gemessen. Mit dem gleichen Prinzip wird die anregende Kraft bestimmt. Aber in diesem Fall sind die Ergebnisse bis zur ersten Eigenfrequenz unterschiedlich. Erst ab der ersten Eigenfrequenz kann man sagen, dass die Berechnung mit dem wahren Kraftwert ähnliche Ergebnisse geben.

In der dritten Bewegungsrichtung sind die Anreger Nr. 2 und Nr. 4 aktiv. Aus diesem Grund haben DMS Nr. 2 und Nr. 4 ein Signal. Die anderen zwei DMS konnten die Dehnung nicht messen, weil die Spannung nicht in ihrer aktiven Messrichtung ist. Die

Kraftbestimmung hat unterschiedliche Ergebnisse bis zur ersten Eigenfrequenz.
Genauso wie die zweite Bewegungsrichtung zeigt die dritte Bewegungsrichtung ähnliche Ergebnisse ab der ersten Eigenfrequenz.

Literaturverzeichnis

- [Fei 2005] Juntao Fei *Active vibration control of flexible steel cantilever beam using piezoelectric actuators*. System Theory, 2005. SSST'05. Proceedings of the Thirty-Seventh Southeastern Symposium on.
- [Gasch et al. 2012] Robert Gasch, Klaus Knothe, Robert Liebich. *Strukturdynamik 2.*, neu bearbeitete Auflage Springer Vieweg, 2012
- [Gommola 2014] Gert Gommola HBM, DMS-Seminarskript. 25.11.2014
- [Gross et al. 2014] Dietmar Gross, Werner Haugen, Jörg Schröder, Wolfgang A. Wall. *Technische Mechanik 2 Elastostatik*. 12., aktualisierte Auflage Springer Vieweg, 2014.
- [Hoffmann] Karl Hoffmann. *Anwendung der Wheatstoneschen Brückenschaltung*. HBM.
- [Hoffmann 1984] Karl Hoffmann. *Hinweise zur Installation von Dehnungsmessstreifen (DMS)*. 3. erweiterte Fassung, HBM. 1984
- [Kletz et al. 2012] B. T. Kletz, J. Melcher, M. Sinapius *Active vibration isolation of rear-view mirrors based on piezoceramic "Double Spiral" actuators*. Proceedings of ISMA, 2012.
- [Kumar et al. 2014] S. Kumar, R. Srivastava, R. K. Srivastava *Active vibration control of smart piezo cantilever beam using PID controller*.
IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology. 2014
- [PI-Ceramics 2011] *PI Ceramic GmbH, Piezokeramische Materialien und Bauelemente*. (Auflage und Verlag nicht angegeben), 2011
- [Sinapius 2013] Prof. Dr.-Ing. Michael Sinapius. *Adaptronik Skript*. 2013
- [Sinapius 2013-2] Prof. Dr.-Ing. Michael Sinapius. *Aktive Vibrationskontrolle Skript*. 2013

- [Tamer 2013] O. Tamer *Optimale Auslegung von ein- und zwei Freiheitsgrad Biegeaktoren, Studienarbeit an der Institut für Adaptronik und Funktionsintegration, TU-BS. 2013*
- [Wierach 2009] Peter Wierach. *Entwicklung von Piezokompositen für adaptive Systeme. Dissertation DLR, 2009*